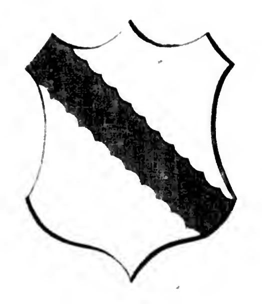
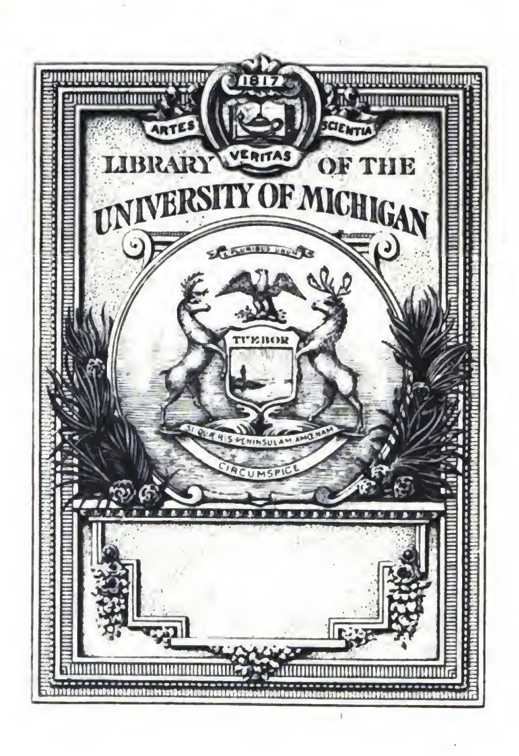



1817
ARTES
SCIENTIA
VERITAS
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
TUEBOR
SI QUÆRIS PENINSULAM AMŒNAM
CIRCUMSPICE

Sammlung
von
Beispielen, Formeln und Tabellen
aus der
Elementar=Mathematik,

zum Gebrauch
der Schulen und zum Selbststudium,
so wie auch für
Geometer, Baumeister und Mechaniker.

Systematisch geordnet und eingerichtet

von
Joseph Pursh,
Lehrer der Mathematik an der Handwerkerschule zu Bern.

Erster Band,
die arithmetischen Wissenschaften enthaltend.

Bern, Chur und Leipzig.
Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1834.

Sammlung

von

Beispielen, Formeln und Tabellen

aus der

Arithmetik, Buchstabenrechnung und Algebra,

zum Gebrauch

der Schulen und zum Selbststudium,

so wie auch für

Geometer, Baumeister und Mechaniker.

Systematisch geordnet und eingerichtet

von

Joseph Pursh,

Lehrer der Mathematik an der Handwerkerschule zu Bern.

Bern, Chur und Leipzig.

Verlag und Eigenthum von J. F. J. Dalp.

1834.

Dem

Herrn Friedrich Trechsel,

rofessor der Mathematik und Physik an der Bern'schen Akademie,

seinem verehrten Lehrer,

idmet dieser Versuch als Zeichen der anfrichtigen Hochachtung und Dankbarkeit

der Verfasser.

Vorrede.

Bei den vielen bereits vorhandenen Sammlungen von Formeln und Aufgaben über beinahe alle mathematischen Disciplinen bedarf die Erscheinung dieses Werkchens, wenn der Verfasser nicht den Vorwurf der Schreibseligkeit sich zuziehen soll, allerdings einiger Rechtfertigung. Diese liegt in dem Zwecke und der Einrichtung dieses Buches. Es ist nämlich für solche Schüler bestimmt, die bereits einen voll-

ständigen Curs der Elementar-Mathematik in den untern Classen durchgemacht haben, und das Gebäude, dessen einzelne Theile sie vorher kennen lernten, nun als ein regelmäßiges, systematisches Ganze wieder durchwandern wollen. Die Kenntniß der Regeln, Benennungen u. s. w. wird daher vorausgesetzt.

Bei der Auswahl der Beispiele war es des Verfassers Hauptaugenmerk, nicht sowohl diejenigen, deren Auflösung den Scharfsinn am meisten übt und allerdings zur anfänglichen Erlernung des Verfahrens am geeignetsten sind, sondern vielmehr diejenigen auszuwählen, die im praktischen Leben dem Mechaniker und Geometer am häufigsten vorkommen, ein Gesichtspunkt, von dem die Verfasser ähnlicher Sammlungen nicht immer ausgegangen sind. Jeder Aufgabe ist die Auflösung beigefügt, zur Erleichterung beim Selbst-

studium, wo oft die Auflösung eines Beispiels, wenn sie nicht gegeben ist, die Schüler lange aufhält und am Ende doch nicht gefunden wird; ist sie hingegen ausgeführt, ihm für die Behandlung ähnlicher Fälle deutliche Fingerzeige giebt, ohne ihn zu einem bloß mechanischen Verfahren zu verleiten.

Unter die Einrichtung der dem Werkchen angehängten Logarithmentabellen ist zu bemerken, daß die Zahlen aus den bis jetzt immer noch allgemein anerkannten Vega'schen Tafeln entlehnt sind, aber der Enge des Raums wegen nur auf 5 Ziffern ausgesetzt werden konnten. Aus dem gleichen Grunde sind anstatt der Sternchen, welche auf die nächstfolgende größere Zahl verweisen, Cursivziffern gebraucht worden.

Die angezeigten Druckfehler bittet man zu verbessern, ehe das Buch gebraucht wird.

Der bis nächsten Herbst unfehlbar erscheinende zweite Theil wird Aufgaben, Formeln und Tabellen aus der Geometrie, Stereometrie und Trigonometrie enthalten.

Bern, den 1. März 1834.

Der Verfasser.

Inhalt.

Einleitung.

Erster Theil.
Zahlenrechnung.

Erster Abschnitt.
Von den ganzen Zahlen.

Zweiter Abschnitt.
Von den Brüchen.

Zweiter Theil.
Die Buchstabenrechnung.

Erster Abschnitt.
Die vier Hauptrechnungsarten.

Zweiter Abschnitt.
Von den Brüchen.

Dritter Abschnitt.
Von den Verhältnissen und Proportionen.

Vierter Abschnitt.
Von den Progressionen.

Seite

Fünfter Abschnitt.

Von den Permutationen, Combinationen und Variationen.

Sechster Abschnitt.

Von den Potenzen.

Siebenter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

Seite

Achter Abschnitt.

Bezeichnung und Rechnung der Wurzelgrößen durch Bruch-Potenzen.

Neunter Abschnitt.

Rechnung mit imaginären Größen.

Zehnter Abschnitt.

Reduktionen.

Elfter Abschnitt.

Der binomische Satz.

Zwöfter Abschnitt.

Logarithmen.

Seite

Dritter Theil.

Die Algebra.

Einleitung.

Erster Abschnitt.

Zweiter Abschnitt.

Dritter Abschnitt.

Vierter Abschnitt.

Einleitung.

Eintheilung der Mathematik.

I. Die reine Mathematik.
  1. Die arithmetischen Wissenschaften.
    A. Die Arithmetik.
    B. Die Algebra.
    C. Die Analisis.
  2. Die geometrischen Wissenschaften.
    A. Die niedere Geometrie.
    B. Die höhere Geometrie.
    C. Die Trigonometrie.

II. Die angewandte Mathematik.
  1. Die unmittelbare Anwendung.
    A. Die praktische Arithmetik.
    B. Die praktische Geometrie.
  2. Die mittelbare Anwendung.
    A. Die mathematischen Naturwissenschaften.
      a. Die mechanischen Wissenschaften.
      b. Die optischen Wissenschaften.
      c. Die astronomischen Wissenschaften.
    B. Die mathematischen Kunstwissenschaften.
      a. Die Maschinenlehre.
      b. Die architektonischen Wissenschaften.

Mathematische Zeichen.

$=$ Gleichheit	$-$ Subtraktion (minus)
$>$ oder $<$ Ungleichheit	$\times$ oder . Multiplikation.
$\sim$ Aehnlichkeit	: Division.
$+$ Addition (plus)	$\sqrt{\ }$ Wurzel.

Erster Theil.

Zahlenrechnung oder Rechenkunst.

Erster Abschnitt.

Von den ganzen Zahlen.

Einleitung.

Numeration.

Schema des Zahlensystems.

Stellen.	Classen. nach deutscher Eintheilung.			nach franz. Einthlg.	
1ste	Einer			Einer	
2te	Zehner			Zehner	
3te	Hunderter			Hunderter	
4te	Einer	Tausender		Einer	Tausender
5te	Zehner			Zehner	
6te	Hunderter			Hunderter	
7te	Einer		Million.	Einer	Millionen
8te	Zehner			Zehner	
9te	Hunderter			Hunderter	
10te	Einer	Tausender		Einer	Billionen
11te	Zehner			Zehner	
12te	Hunderter			Hunderter	
13te	Einer		Billion.	Einer	Trillionen
14te	Zehner			Zehner	
15te	Hunderter			Hunderter	
16te	Einer	Tausender		Einer	Quatrill.
17te	Zehner			Zehner	
18te	Hunderter			Hunderter	
19te	Einer		Trillion.	Einer	Quintill.
20ste	Zehner			Zehner	
21ste	Hunderter			Hunderter	
22ste	Einer	Tausender		Einer	Sextill.
23ste	Zehner			Zehner	
24ste	Hunderter			Hunderter	
25ste	Einer		Quatrill.	Einer	Septill.
u.s.w.					

Beispiele.

A. Folgende durch Ziffern dargestellte Zahlen sind in Worten auszudrücken:

1) Mittlere Entfernungen der Planeten von der Sonne (nach Littrow).

Merkur	8082100	geographische	Meilen.
Venus	15102300	—	—
Erde	20878700	—	—
Mars	31812800	—	—
Jupiter	108593700	—	—
Saturn	199137600	—	—
Uranus	400521000	—	—

2) Die Bahnen der Planeten um die Sonne.

Merkur	50000000	geographische	Meilen.
Venus	95000000	—	—
Erde	130000000	—	—
Mars	200000000	—	—
Jupiter	680000000	—	—
Saturn	1250000000	—	—
Uranus	2500000000	—	—

Auflösungen.

a. nach deutscher Eintheilung.

1)	Merkur	8 mill.	82	tausend	100	geograph.	Meilen.
	Venus	15 —	102	—	300	—	—
	Erde	20 —	878	—	700	—	—
	Mars	31 —	812	—	800	—	—
	Jupiter	108 —	593	—	700	—	—
	Saturn	199 —	137	—	600	—	—
	Uranus	400 —	521	—		—	—

2)	Merkur	tausend	50	millionen	geographische	Meilen.
	Venus	—	95	—	—	—
	Erde	—	130	—	—	—
	Mars	—	200	—	—	—

Jupiter		tausend	680	millionen	geographische	Meilen.
Saturn	1	—	250	—	—	—
Uranus	2	—	500	—	—	—

b. nach französischer Eintheilung.

1)	Merkur	8	millionen	82	tausend	100	geograph.	Meilen.
	Venus	15	—	102	—	300	—	—
	Erde	20	—	878	—	700	—	—
	Mars	31	—	812	—	800	—	—
	Jupiter	108	—	593	—	700	—	—
	Saturn	199	—	137	—	600	—	—
	Uranus	400	—	521	—		—	—
2)	Merkur		billionen	50	millionen	geograph.	Meilen.	
	Venus		—	95	—	—	—	
	Erde		—	130	—	—	—	
	Mars		—	200	—	—	—	
	Jupiter		—	680	—	—	—	
	Saturn	1	—	250	—	—	—	
	Uranus	2	—	500	—	—	—	

B. Nachstehende, in Worten gegebene Zahlen sind durch Ziffern darzustellen:

1) Die Oberfläche der Planeten (nach Littrow).

a. nach deutscher Eintheilung.

Merkur		tausend	1	mill.	72	tausend	900	Quadratm.
Venus		—	8	—	376	—	200	—
Erde		—	9	—	281	—	100	—
Mars		—	2	—	910	—	600	—
Jupiter	1	—	124	—	241	—	300	—
Saturn		—	883	—	373	—		—
Uranus		—	166	—	66	—		—

b. nach französischer Eintheilung.

Merkur	billionen	1	mill.	72	tausend	900	Quadratm.
Venus	—	8	—	376	—	200	—
Erde	—	9	—	281	—	100	—

Mars		billionen	2 mill.	910	tausend	600		Quadratm.
Jupiter	1	—	124 —	241	—	300		—
Saturn		—	883 —	373	—			—
Uranus		—	166 —	66	—			—

2) Körperlicher Inhalt der Planeten.

a. nach deutscher Eintheilung.

Merkur		bill.		tauf.	104	mill.	500	tauf.	Cubikm.
Venus		—	2	—	280	—			—
Erde		—	2	—	660	—			—
Mars		—		—	467	—			—
Jupiter	3	—	500	—		—			—
Saturn	2	—	500	—		—			—
Uranus		—	201	—	230	—			—

b. nach französischer Eintheilung.

Merkur		trill.		bill.	104	mill.	500	tausend	Cubikm.
Venus		—	2	—	280	—			—
Erde		—	2	—	660	—			—
Mars		—		—	467	—			—
Jupiter	3	—	500	—		—			—
Saturn	2	—	500	—		—			—
Uranus		—	201	—	230	—			—

Auflösungen.

1)	Merkur	1072900	Quadratmeilen.
	Venus	8376200	—
	Erde	9281100	—
	Mars	2910600	—
	Jupiter	1124241300	—
	Saturn	883373000	—
	Uranus	166066000	—
2)	Merkur	104500000	Cubikmeilen.
	Venus	2280000000	—
	Erde	2660000000	—
	Mars	467000000	—

Jupiter	3500000000000	Cubikmeilen.
Saturn	2500000000000	—
Uranus	201230000000	—

I.

Rechnung mit gleichnamigen und unbenannten Zahlen.

1.

Addition.

Erklärungen.

1) Man nennt die Zahlen, welche addirt werden: Addenden, Aggreganden, Summanden,

2) und die durch das Zusammenzählen der Addenden gefundene Zahl: Aggregat, Summe.

Aufgaben.

1) Nach Hoffmann hält:

Europa	179500	□ Meilen	und	235000000	Menschen.
Asia	780000	—		500000000	—
Afrika	545000	—		200000000	—
Nordamerika	342000	—	}	40000000	—
Südamerika	321000	—	}		
Polinesien	158000	—		2000000	—
d. feste Land	2325500	□ Meilen	und	977000000	Menschen.

2.

Subtraktion.

Erklärungen.

1) Man nennt die Zahl, von der abgezogen wird, den Minuend,

2) die abzuziehende: Subtrahend,

3) und die durch das Abziehen des Subtrahenden vom Minuenden erhaltene Zahl: **Unterschied**, **Differenz**, **Rest**.

Aufgaben.

1) Die Peterskirche zu Rom ist 500 par. Fuß hoch, der Straßburger Münsterthurm 442 Fuß. Um wie viel höher ist der erste?

500	Fuß
442	—
58	Fuß.

2) Der Montblanc ist 14764 par. Fuß hoch, die Jungfrau 12856; um wie viel höher ist der erste?

14764	Fuß
12856	—
1908	Fuß.

3) Die Oberfläche der Erde hält 9281100 □Meilen, das feste Land 2325500 □Meilen. Wie viel □Meilen enthält das Meer?

9281100	□Meilen
2325500	—
6955600	□Meilen.

3.

Multiplikation.

Erklärungen.

1) Man nennt die Zahl, welche angiebt, wie oft die andere multiplizirt werden soll: den **Multiplikator**,

2) und die Zahl, welche so oft multiplizirt wird, als der Multiplikator Einheiten enthält: den **Multiplikand**;

3) man belegt den Multiplikator und den Multiplikand auch mit dem gemeinschaftlichen Namen: **Faktoren**;

4) man heißt die aus der Vervielfältigung der Faktoren entstehende Zahl: Produkt, Faktum.

Aufgaben.

1) Der Schall verbreitet sich in einer Sekunde 1038 par. Fuß weit (mittlere Temperatur), wie weit gelangt er in einer Minute?

```
1038
  60
-----
62280
```

2) Ein Kubikfuß hat 1728 Kubikzolle; wenn nun ein Kubikklafter 216 Kubikfuß hat, wie viel hält es Kubikzolle?

```
  1728
   216
 ------
 10368
 1728
3456
------
373248 Kubikzoll.
```

4.

Division.

Erklärungen.

1) Man nennt die Zahl, mit der untersucht werden soll, wie vielmal sie in einer andern enthalten ist: den Divisor,

2) die Zahl, von der zu bestimmen ist, wie oft der Divisor in derselben enthalten sei: den Dividend,

3) und die Zahl, welche angiebt, wie vielmal der Divisor im Dividenden enthalten ist: den Quotient.

Aufgaben.

1) Ein Bern-Kubikfuß Regenwasser wiegt 6194 Qt., wie viel Pfd. Lth. Qt. giebt es?

```
4 | 6194 | 1548 Lth. 2 Qt.
  | 4
  ----
    21
    20
    ---
     19
     16
     ---
      34
      32
      ---
       2
```

```
32 | 1548 | 48 Pfd. 12 Lth.
   | 128
   -----
     268
     256
     ---
      12
```

Antwort: 48 Pfd. 12 Lth. 2 Qt.

2) Ein Jahr hat 31556928 Sekunden, wie viel Tage, Stunden, Minuten und Sekunden macht dies aus?

```
60 | 31556928 | 525948 Minut. 48 Sek.
   | 300
   ----
     155
     120
     ---
      356
      300
      ---
       569
       540
       ---
        292
        240
        ---
         528
         480
         ---
          48
```

```
60 |525948 |8765 Stunden 48 Minuten.
   |480    |
   ----
     459
     420
     ---
      394
      360
      ---
       348
       300
       ---
        48

24 |8765 |365 Tage 5 Stunden.
   |72   |
   ---
   156
   144
   ---
    125
    120
    ---
      5
```

Antwort: 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten und 48 Sek.

Anhang.

Von der Theilbarkeit der Zahlen.

A. Merkmale die bestimmen, ob eine Zahl durch 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10 ohne Rest zu theilen ist:

durch 2, alle geraden Zahlen,
— 4, wenn 4 in den zwei letzten Zahlstellen ohne Rest enthalten ist,
— 8, wenn 8 in den drei letzten Zahlstellen ohne Rest enthalten ist,
— 3 und 9; wenn die Quersumme einer Zahl ein Produkt von 3 oder 9, so ist die Zahl im ersten Falle durch 3 und im zweiten durch 9 zu theilen,
— 6, wenn sie das Merkmal von 2 und 3 in sich ver-

einigt oder wenn die Quersumme einer geraden Zahl ein Produkt von 3 ist,

durch 5 und 10, wenn die Zahl in der Stelle der Einer im ersten Falle eine 5 oder 0, im zweiten eine 0 hat.

B. Vom größten gemeinschaftlichen Maße.

Beispiele.

a. 20, 28 = 4
b. 78, 102 = 6
c. 64, 104 = 8
d. 105, 91 = 7
e. 108, 153 = 9
f. 198, 781 = 11
g. 12, 18, 30 = 6
h. 49, 35, 63 = 7
i. 187, 209, 231 = 11
k. 135, 153, 252 = 9
l. 48, 72, 104, 136 = 8
m. 72, 108, 156, 204 = 12.

C. Zerfällung einer Zahl in einfache Faktoren.

Beispiele.

a. 2310 = 2.3.5.7.11.
b. 15015 = 3.5.7.11.13.
c. 729 = 3.3.3.3.3.3.
d. 3125 = 5.5.5.5.5.
e. 900 = 2.2.3.3.5.5.
f. 12100 = 2.2.2.5.5.5.11.11.
g. 127400 = 2.2.2.5.5.7.7.13.

D. Aufsuchung aller Zahlen, die in einer gegebenen enthalten sind.

Beispiele.

a. 256 = 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128
b. 6561 = 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187
c. 210 = 2, 3, 5, 6, 7, 10, 14, 15, 21, 30, 35, 42, 70, 105.
d. 770 = 2, 5, 7, 10, 11, 14, 22, 35, 55, 70, 77, 110, 154, 385
e. 900 = 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 25, 30, 36, 45, 50, 60, 75, 90, 100, 150, 180, 225, 300, 450.

E. Auffindung der kleinsten Dividenden für mehrere gegebene Zahlen.

Beispiele.

a. 4, 36, 108 = 108
b. 2, 4, 36, 180 = 180

c. 8, 12, 45 = 360.
d. 45, 100, 25, = 900.
e. 8, 12, 15, 16, 18 = 720.
f. 10, 12, 16, 20, 24, 25 = 1200.
g. 50, 70, 175 = 350.
h. 10. 12, 15, 18 = 180.
i. 12, 16, 18 = 144.
k. 18, 20, 24, 25, 30 = 1800.
l. 12, 16, 18, 24, 28, 56 = 1008.
m. 14, 18, 24, 30, 32, 35, 56 = 10080.

II.
Rechnung mit ungleichen oder benannten Zahlen.

Einleitung.

A. Reduziren.

a. Evehiren.

Beispiele.

1) 34 Thlr. 3 gr. $5\frac{1}{7}$ pf. = $34\frac{1}{7}$ Thlr.
2) 7 L. 5 s. 3 d. = $7\frac{21}{80}$ L.
3) 21 Ctr. 43 Pfd. 24 Lth. = $21\frac{7}{16}$ Ctr.
4) 8 K. 5 H. 9 D. 3 Mètres 3 d. 4 c. 1 m. = 8593341 Mètres.

b. Comminuiren.

Beispiele.

1) 9 Fß. 11 Zll. 6 Linien = 1434 Linien.
2) 2 Thlr. 7 gr. 8 pf. = 668 pf.
3) 2573 L. 19 s. 9 d. = 617757 d.
4) 9 Ctr. 14 Pfd. 27 Lth. 3 Qt. = 117103 Qt.

B. Resolviren.

a. Separiren.

Beispiele.

1) $7\frac{5}{9}$ Fß. = 7 Fß. 6 Zll. 8 Linien.
2) $2\frac{21}{32}$ Ctr. = 2 Ctr. 65 Pfd. 20 Lth.

3) $172^{17}/_{200}$ Stunden = 7 Tage 4 Stunden 4 Minut. 6 Sek.
4) $1095^{73}/_{240}$ Minuten = $18^0. 15'. 18''. 15'''$.

b. Repartiren.

Beispiele.

1) 1513 pf. = 5 Thlr. 6 gr. 1 pf.
2) 1278745 d. = 5328 L. 2 s. 1 d.
3) 5425789 Qt. = 423 Ctr. 88 Pfd. 21 Lth. 1 Qt.
4) 85078,705 Grammes = 8 M. 5 K. 7 D. 8 Grammes 7 d. 5 m.

1.

Addition.

Aufgaben.

1) $8^3/_4$ Klftr. $6^7/_8$ Fß. $4^2/_3$ Zll. + $5^2/_3$ Klftr. $6^3/_4$ Fß. $4^5/_6$ Zll. + $3^7/_8$ Klftr. $7^5/_6$ Fß. $5^1/_2$ Zll.

$8^3/_4$ Klftr. =	8 Klftr.	4 Fß.	6 Zll.	0 Linien.
$6^7/_8$ Fuß =	0 —	6 —	10 —	6 —
$4^2/_3$ Zoll =	0 —	0 —	4 —	8 —
$5^2/_3$ Klftr. =	5 —	4 —	0 —	0 —
$6^3/_4$ Fuß =	0 —	6 —	9 —	0 —
$4^5/_6$ Zoll =	0 —	0 —	4 —	10 —
$3^7/_8$ Klftr. =	3 —	5 —	3 —	0 —
$7^5/_6$ Fuß =	0 —	7 —	10 —	0 —
$5^1/_2$ Zoll =	0 —	0 —	5 —	6 —
	16 —	32 —	51 —	30
	22 —	0 —	5 —	6

2.

Subtraktion.

Aufgaben.

1) Wie alt wurde Newton, welcher 1727 den 20ten März starb und 1642 am 25ten Dezember geboren war?

1726 Jahr	2 Mth.	19 Tg.	
1641 —	11 —	24 —	
84 —	2 —	25 —	

2) Kant, geboren den 22ten April 1724, starb den 12ten Hornung 1804; wie alt wurde er?

1803 Jahr	1 Mth.	11 Tg.
1723 —	3 —	21 —
79 —	9 —	20 —

3.

Multiplikation.

Aufgaben.

1) Wie viel Bern-Pfund wird ein Kubikfuß Quecksilber wiegen, wenn ein Kubikfuß Wasser 48 Pfd. 12 Lth. 2 Qt. wiegt und das Quecksilber 14 mal schwerer als das Wasser ist?

48 Pfd.	12 Lth.	2 Qt.
		14
672 —	168 —	28 —
677 —	15 —	0 —

Antwort: 677½ Bern-Pfund.

2) Der Berg Chimborazo ist 6540 Mètres hoch. Wenn nun der Mètre 3 Fuß 4 Zoll 11 Linien Berner Maß hält wie groß ist die Höhe dieses Berges in Fuß ausgedrückt?

3 Fuß	4 Zoll	11 Linien
		6540
19620 —	26160 —	71940 —
22299 —	7 —	0 —

Antwort: 22300 Bern-Fuß.

3) Ein Centner Waare kostet 8 Fl. 12 bz. 2 kr.; was kosten 35 Centner?

1ste Auflösung.

8 Gl. 12 bz. 2 kr. $= 8 + \frac{12}{15} + \frac{2}{60}$ Gl. $= 8\frac{50}{60}$ Gl. $=$ $8\frac{5}{6}$ Gl. $= \frac{53}{6}$ Gl.

$35 \times \frac{53}{6} = \frac{35 \times 53}{6} = \frac{1855}{6} = 309\frac{1}{6}$ Gl. $=$ 309 Gl. 2 bz. 2 kr.

2te Auflösung.

8 Gl. 12 btz. 2 kr. = 530 kr.
35 × 530 = 18550 kr. = 309 Gl. 2 btz. 2 kr.

4.

Division.

Aufgaben.

1) Wie viel Uhr muß es in Petersburg seyn, wenn die Uhr in Wien Mittag zeigt? Petersburg hat 27⁰—58′—30″ und Wien 14⁰—2′—30″ Länge.

Auflösung.

Die Längendifferenz zwischen Petersburg und Wien beträgt:

$$\begin{array}{l} 27^0 - 58' - 30'' \\ 14^0 - 2' - 30'' \\ \hline 13^0 - 56' \end{array}$$

Die Sonne durchläuft scheinbar in 24 Stunden 360 Grade, mithin in 1 Stunde = $360/24$ = 15 Grad.

So oft nun 15⁰ in 13⁰ — 56′ enthalten sind, so viel Stunden liegen die Mittagslinien beider Orte von einander entfernt, nämlich:

$$\begin{array}{r|l|l} 15 & 13 - 56 & 55' - 44'' \\ & \times 60 & \\ & \overline{780} & \\ & + 56 & \\ & \overline{836} & \\ & 75 & \\ & \overline{86} & \\ & 75 & \\ & \overline{11} & \\ & \times 60 & \\ & \overline{660} & \\ & 60 & \\ & \overline{60} & \\ & 60 & \\ & \overline{0} & \end{array}$$

Die Zeitdifferenz beträgt also 55′ — 44″; folglich ist es, wenn die Uhren in Wien Mittag zeigen, in Petersburg schon 55′ — 44″ nach 12 Uhr.

Es folgt aber auch aus der Zeitdifferenz der Mittage zwischen Petersburg und Wien, daß, wenn Petersburg Mittag hat, es in Wien 11 Uhr 4 Minut. 16 Sek. ist.

2) 44 Ctr. 62 Pfd. 16 Lth. Waare kosten 803 Gl. 3 bz. 3 Xr.; was kostet ein Ctr.?

1ste Auflösung.

44 Ctr. 62 Pfd. 16 Lth. $= 44 + {}^{62}/_{100} + {}^{16}/_{3200}$ Ctr. $= 44^{2000}/_{3200}$ Ctr. $= 44^{5}/_{8}$ Ctr. $= {}^{357}/_{8}$ Ctr.
803 Gl. 3 bz. 3 kr. $= 803 + {}^{3}/_{15} + {}^{3}/_{60}$ Gl. $= 803^{15}/_{60}$ Gl. $= 803^{1}/_{4}$ Gl. $= {}^{3213}/_{4}$ Gl.

${}^{357}/_{8}$	${}^{3213}/_{4}$	
1428	25704	18 Gl.
	1428	
	11424	
	11424	
	0	

2te Auflösung.

44 Ctr. 62 Pfd. 16 Lth. $= {}^{142800}/_{3200}$ Ctr.
803 Gl. 3 bz. 3 kr. $= 48195$ kr.

${}^{142800}/_{3200}$	48195	
142800	154224000	1080 kr. = 18 Gl.
	142800	
	1142400	
	1142400	
	0	

Probe.

Ein Ctr. Waare kostet 18 Gl.; wie viel Ctr. erhält man für 803 Gl. 3 bz. 3 kr.?

1ste Auflösung.

803 Gl. 3 bz. 3 kr. $= 803 + {}^{3}/_{15} + {}^{3}/_{60}$ Gl. $= 803^{15}/_{60}$ Gl. $= 803^{1}/_{4}$ Gl. $= {}^{3213}/_{4}$ Gl.

18 | $\frac{3213}{4}$ |

72 | 3213 | $44\frac{45}{72}$ Ctr. = 44 Ctr. 62 ℔ 16 Lth.
288
333
288
45

2te Auflösung.

803 Gl. 3 bz. 3 kr. = 48195 kr.

$\frac{18}{3200}$ | $\frac{48195}{60}$ |

1080 | 154224000 | 142800 Lth. = 44 Ctr. 62 ℔ 16 Lth.
1080
4622
4320
3024
2160
8640
8640
0

Zweiter Abschnitt.
Von den Brüchen.

I.
Die gemeinen Brüche.
Einleitung.
A. Eintheilung und Umformung der Brüche.
a. Eintheilung der Brüche.

1) Wenn der Zähler kleiner als der Nenner ist, so heißt der Bruch ein echter,
2) ist der Zähler größer als der Nenner, ein unechter Bruch;
3) wenn der Zähler und der Nenner gleich sind, so ist der Bruch der Einheit gleich;

4) die Verbindung einer ganzen Zahl mit einem Bruche nennt man eine gemischte Zahl.

b. Umformung der Brüche.

Beispiele.

1) Folgende gemischte Zahlen sind in unechte Brüche zu verwandeln:

$3\frac{2}{3} = \frac{11}{3}$, $5\frac{1}{4} = \frac{21}{4}$, $6\frac{7}{8} = \frac{55}{8}$, $7\frac{3}{11} = \frac{80}{11}$, $8\frac{4}{9} = \frac{76}{9}$, $15\frac{3}{7} = \frac{108}{7}$, $20\frac{2}{3} = \frac{62}{3}$, $25\frac{2}{9} = \frac{227}{9}$.

2) Nachstehende unechte Brüche sind in gemischte Zahlen zu verwandeln:

$\frac{28}{5} = 5\frac{3}{5}$, $\frac{55}{8} = 6\frac{7}{8}$, $\frac{65}{9} = 7\frac{2}{9}$, $\frac{69}{11} = 6\frac{3}{11}$, $\frac{80}{7} = 11\frac{3}{7}$, $\frac{229}{13} = 17\frac{8}{13}$, $\frac{262}{17} = 21\frac{5}{17}$, $\frac{454}{19} = 23\frac{17}{19}$, $\frac{793}{26} = 31\frac{18}{25}$.

B. Von der Vereinfachung und Vergleichung der Brüche.

Beispiele.

a. Folgende Brüche sind durch den größten Divisor aufzuheben:

$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$, $\frac{12}{20} = \frac{3}{5}$, $\frac{56}{64} = \frac{7}{8}$, $\frac{48}{88} = \frac{6}{11}$, $\frac{9}{45} = \frac{1}{5}$, $\frac{21}{45} = \frac{7}{15}$, $\frac{54}{57} = \frac{18}{19}$, $\frac{18}{27} = \frac{2}{3}$, $\frac{45}{63} = \frac{5}{7}$, $\frac{25}{35} = \frac{5}{7}$, $\frac{14}{35} = \frac{2}{5}$, $\frac{49}{63} = \frac{7}{9}$, $\frac{22}{77} = \frac{2}{7}$, $\frac{55}{77} = \frac{5}{7}$, $\frac{12}{30} = \frac{2}{5}$, $\frac{153}{324} = \frac{17}{36}$, $\frac{15}{125} = \frac{23}{25}$, $\frac{133}{147} = \frac{19}{21}$, $\frac{119}{245} = \frac{17}{35}$, $\frac{209}{253} = \frac{19}{23}$, $\frac{105}{165} = \frac{7}{11}$, $\frac{196}{210} = \frac{14}{15}$, $\frac{630}{875} = \frac{18}{25}$, $\frac{357}{735} = \frac{17}{35}$, $\frac{392}{1064} = \frac{7}{19}$, $\frac{405}{621} = \frac{15}{23}$, $\frac{308}{528} = \frac{7}{12}$, $\frac{285}{304} = \frac{15}{16}$, $\frac{483}{575} = \frac{21}{25}$, $\frac{493}{522} = \frac{17}{18}$, $\frac{403}{589} = \frac{13}{19}$, $\frac{111}{185} = \frac{3}{5}$, $\frac{666}{1221} = \frac{6}{11}$, $\frac{788}{985} = \frac{4}{5}$, $\frac{91}{156} = \frac{7}{12}$.

b. Nachstehende Brüche sind unter die kleinste gleiche Benennung zu bringen:

$(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}) = (\frac{8}{12}, \frac{9}{12})$, $(\frac{5}{6}, \frac{3}{5}) = (\frac{25}{30}, \frac{18}{30})$, $(\frac{5}{8}, \frac{8}{9}) = (\frac{45}{72}, \frac{64}{72})$, $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}) = (\frac{40}{60}, \frac{45}{60}, \frac{36}{60})$, $(\frac{5}{6}, \frac{7}{8}) = (\frac{20}{24}, \frac{21}{24})$, $(\frac{11}{9}, \frac{11}{12}) = (\frac{44}{36}, \frac{33}{36})$, $(\frac{7}{15}, \frac{11}{18}) = (\frac{42}{90}, \frac{55}{90})$, $(\frac{17}{21}, \frac{27}{28}) = (\frac{68}{84}, \frac{81}{84})$, $(\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}) = (\frac{6}{12}, \frac{9}{12}, \frac{10}{12})$, $(\frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{5}{12}) = (\frac{18}{24}, \frac{21}{24}, \frac{10}{24})$, $(\frac{15}{16}, \frac{13}{18}, \frac{17}{24}) = (\frac{135}{144}, \frac{104}{144}, \frac{102}{144})$, $(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5},$

$\frac{5}{6}, \frac{7}{8}) = (\frac{80}{120}, \frac{90}{120}, \frac{96}{120}, \frac{100}{120}, \frac{105}{120}), (\frac{17}{18}, \frac{5}{12}, \frac{7}{8}, \frac{3}{4}, \frac{5}{6}) = (\frac{68}{72}, \frac{30}{72}, \frac{63}{72}, \frac{54}{72}, \frac{60}{72}), (\frac{13}{14}, \frac{11}{12}, \frac{6}{7}, \frac{20}{21}, \frac{25}{28}, \frac{41}{42}) = (\frac{78}{84}, \frac{77}{84}, \frac{72}{84}, \frac{80}{84}, \frac{75}{84}, \frac{82}{84})$.

1.

Addition.

Beispiele.

1)
$\frac{1}{2} = \frac{180}{360}$
$\frac{2}{3} = \frac{240}{360}$
$\frac{3}{4} = \frac{270}{360}$
$\frac{4}{5} = \frac{288}{360}$
$\frac{5}{6} = \frac{300}{360}$
$\frac{7}{8} = \frac{315}{360}$
$\frac{8}{9} = \frac{320}{360}$
$\frac{9}{10} = \frac{324}{360}$
$\frac{11}{12} = \frac{330}{360}$

$\frac{2567}{360} = 7\frac{47}{360}$

2)
$\frac{11}{12} = \frac{660}{720}$
$\frac{14}{15} = \frac{672}{720}$
$\frac{15}{16} = \frac{675}{720}$
$\frac{17}{18} = \frac{680}{720}$
$\frac{19}{20} = \frac{684}{720}$
$\frac{23}{24} = \frac{690}{720}$
$\frac{29}{30} = \frac{696}{720}$

$\frac{4757}{720} = 6\frac{437}{720}$

Aufgabe.

1) Das Gefäll der Aar vom Thunersee bis Bern nach dem Durchschnitt der Beobachtungen vom Juni und Juli 1825 beim mittlern Wasserstand beträgt:

von Echibühl bis Thun, Allmendbrücke	$5\frac{2}{5}$ Fuß.
— Thun, Allmendbrücke bis Suld . . .	$11\frac{3}{5}$ —
— Suld bis Uttingfluh	$45\frac{2}{3}$ —
— Uttingfluh bis Jaberg	$16\frac{1}{5}$ —
— Jaberg bis Lett	$66\frac{1}{4}$ —
— Lett bis Gürben (Bodenacker) . . .	$31\frac{3}{5}$ —
— Gürben bis Inselein	$12\frac{5}{6}$ —
— Inselein bis Bern, Schwellenmatt .	$6\frac{1}{4}$ —

Das ganze Gefäll vom Thunersee bis Bern ist $195\frac{4}{5}$ Fuß.

2.
Subtraktion.

Beispiele.

1) $\frac{8}{9} = \frac{48}{54}$
$\frac{5}{6} = \frac{45}{54}$
$\frac{3}{54} = \frac{1}{18}$.

3) $4\frac{3}{5} = 4\frac{27}{45}$
$2\frac{7}{9} = 2\frac{35}{45}$
$1\frac{37}{45}$.

2) $8\frac{5}{6} = 8\frac{20}{24}$
$5\frac{3}{4} = 5\frac{18}{24}$
$3\frac{2}{24} = 3\frac{1}{21}$.

4) $1\frac{2}{3} = 1\frac{10}{15}$
$\frac{4}{5} = \frac{12}{15}$
$\frac{13}{15}$.

3.
Multiplikation.

Aufgaben.

1) Die Länge eines Heustockes beträgt 18½ Fuß, die Breite 15¾ Fuß und die Höhe 10⅔ Fuß; wie viel Kubikfuß enthält derselbe?

$$18\frac{1}{2} \times 15\frac{3}{4} \times 10\frac{2}{3} = \frac{37}{2} \times \frac{63}{4} \times \frac{32}{3}$$
$$= \frac{37 \times 63 \times 32}{2 \times 4 \times 3} = \frac{74592}{24} = 3108 \text{ Kubikfuß.}$$

2) Ein Balken ist 18 Fuß lang, ¾ Fuß breit und ⅔ Fuß dick; wie groß ist sein kubischer Inhalt?

$$18 \times \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{18 \times 3 \times 2}{4 \times 3} = \frac{108}{12} = 9 \text{ Kubikfuß.}$$

3) Ein Quaderstein ist 4 Fuß lang, 3⅔ Fuß breit und ¾ Fuß dick; wie groß ist sein kubischer Inhalt?

$$4 \times 3\frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = 4 \times \frac{11}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{4 \times 11 \times 3}{3 \times 4} = \frac{132}{12}$$
$$= 11 \text{ Kubikfuß.}$$

4.
Division.

Aufgaben.

1) Die Aar fällt von Thun bis Thalgut auf einer Länge von 34948 Fuß um 78¾ Fuß; wie groß ist das mittlere Gefälle auf 1000 Fuß?

$$\frac{87\frac{3}{4} \times 1000}{34948} = \frac{\frac{351 \times 1000}{4}}{34948} = \frac{351 \times 1000}{4 \times 34948} = \frac{351000}{139792}$$

$= 2\frac{71416}{139792}$ Fuß $= 2$ Fuß $6\frac{2155}{17474}$ Zoll.

2) Von Thalgut bis Bern fällt sie auf einer Länge von 60890 Fuß um 102⅔ Fuß; wie groß ist das mittlere Gefälle auf 1000 Fuß?

$$\frac{102\frac{2}{3} \times 1000}{60890} = \frac{\frac{308 \times 1000}{3}}{60890} = \frac{308 \times 1000}{3 \times 60890} = \frac{308000}{182670}$$

$= 1\frac{12533}{18267}$ Fß. $= 1$ Fß. $8\frac{1420}{6089}$ Zoll.

Anhang.

Rechnung par parties aliquotes.

Beispiele.

1.

7⅞ Elle
zu 5 btz. die Elle

	35	
für ½ Ell.	2 — 2	kr.
¼ —	1 — 1	—
⅛ —	0 — 2½	—
btz.	39 — 1½	—

2.

7 ℔ 29 Lth.
zu 2 L. das ℔

	14	
für 16 Lth.	1	
8 —	0 — 10 s.	
4 —	0 — 5 —	
1 —	0 — 1 — 3 d.	
L.	15 — 16 — 3 —	

3.

5 ℔ 31 Lth 2 Qt.
zu 12 fl das ℔

60
für 16 Lth. 6
8 — 3
4 — 1 — 7 bz. 2 kr.
2 — 0 — 11 — 1 —
1 — 0 — 5 — $2\frac{1}{2}$ —
2 Qt. 0 — 2 — $3\frac{1}{4}$ —

fl 71 — 12 — $\frac{3}{4}$ —

4.

14 ℔ 7 Lth. 1 Qt.
zu 20 L. das ℔

280
für 4 Lth. 2 — 10 s.
2 — 1 — 5 —
1 — 0 — 12 — 6 d.
1 Qt. 0 — 3 — $1\frac{1}{2}$ —

L. 284 — 10 — $7\frac{1}{2}$ —

5.

36 ℔ 21 Lth $\frac{1}{2}$ Qt.
zu 18 fl das ℔

288
36
für 16 Lth. 9
4 — 2 — 3 bz. 3 kr.
1 — 0 — 8 — $1\frac{3}{4}$ —
$\frac{1}{2}$ Qt. 0 — 0 — $\frac{7}{32}$ —

fl 659 — 12 — $\frac{31}{32}$ —

6.

7 ℔ 15 Lth 3 Qt.
zu 5 Thlr. das ℔

35
für 8 Lth. 1 — 6 gr.
4 — 0 — 15 —
2 — 0 — 7 — 6 pf.
1 — 0 — 3 — 9 —
2 Qt. 0 — 1 — $10\frac{1}{2}$ —
1 — 0 — 0 — $11\frac{1}{4}$ —

Thlr. 37 — 11 — $\frac{3}{4}$ —

7.

9 Lth. $\frac{1}{2}$ Qt.
zu 4 L. das ℔

für 8 Lth. 1
1 — 0 — 2 s. 6 d.
$\frac{1}{2}$ Qt. 0 — 0 — $7\frac{1}{2}$ —

L. 1 — 3 — $1\frac{1}{2}$ —

8.

20 Lth. 3 Qt.
zu 3 fl das ℔

für 16 Lth. 0 — 11 bz. 1 kr.
4 — 0 — 2 — $3\frac{1}{4}$ —
2 Qt. 0 — 0 — $1\frac{13}{32}$
1 — 0 — 0 — $\frac{45}{64}$ —

fl 0 — 14 — $2\frac{23}{64}$ —

9.

7/8 ℔
zu 9 btz. das ℔

für 1/2 ℔ 4 btz. 2 kr.
1/4 — 2 — 1 —
1/8 — 1 — 1/2 —

btz. 7 — 3 1/2

10.

6 Ctr. 40 ℔
zu 12 fl den Ctr.

72
für 20 ℔ 2 — 6 btz.
10 — 1 — 3 —
5 — 0 — 9 —
4 — 0 — 7 — 4/5 kr.
1 — 0 — 1 — 19/20 —

fl 76 — 11 — 1 3/4 —

11.

6 Bll. 8 R. 16 B. Pp.
zu 15 L. den Ballen

90
für 5 Rs. 7 — 10 s.
2 — 3 — 0 —
1 — 1 — 10 —
10 Bch. 0 — 15 —
5 — 0 — 7 — 6 d.
1 — 0 — 1 — 6 —

L. 103 — 4 — 0 —

12.

2 Klftr. 4 F. 3 Z. 6 L.
zu 7 Thlr. das Klftr.

14
für 3 F. 3 — 12 gr.
1 — 1 — 4 —
3 Zll. 0 — 7 —
6 Lin. 0 — 1 — 2 pf.

Thlr. 19 — 0 — 2 —

13.

87 ℔
das ℔ zu 4 L. 16 s. 9 d.

348
zu 10 s. 43 — 10 s.
5 — 21 — 15 —
1 — 4 — 7 —
6 d. 2 — 3 — 6 d.
3 — 1 — 1 — 9 —

L. 420 — 17 — 3 —

14.

83 ℔
das ℔ zu 2 fl 12 btz. 2 kr.

166
zu 5 btz. 27 — 10 btz.
3 — 16 — 9 —
3 — 16 — 9 —
1 — 5 — 8 —
2 kr. 2 — 11 — 2 kr.

fl 234 — 7 — 2 —

15.

65 ℔
das ℔ zu 3 Thlr. 23 gr. 10 pf.

195
zu 12 gr. 32—12 gr.
6— 16— 6—
3— 8— 3—
2— 5—10—
6 pf. 1— 8—6 pf.
3— 0—16—3—
1— 0— 5—5—

Thlr. 259—13—2—

17.

16 Klftr. 4 Fß. 5 Zll.
d. Klftr. zu 9 ƒ 10 btz. 1 kr.

144
für 5 btz. 5—5 btz.
3 — 3—3—
1 — 1—1—
1 — 1—1—
1 kr. 0—4—
für 3 Fß. 4—12—2½ kr.
1 — 1—9— ⅚ —
4 Zll. 0— 8— 5/18 —
1 — 0— 2— 5/72 —

ƒ 162—0—3 49/72—

16.

53 ℔ 25 Lth. 2 Qt.
das ℔ zu 6 L. 18 s. 3 d.

318
zu 10 s. 26—10 s.
5— 13— 5—
2— 5— 6—
1— 2—13—
3 d. 0—13—3 d.
für 16 Lth. 3— 9—1½—
8— 1—14—6¾—
1— 0— 4—3 27/32—
2 Qt. 0— 2—1 59/64—

L. 371—17—5 1/64 —

18.

15 Bll. 4 R. 6 B. Pp.
die Bll. zu 13 Thlr. 21 gr. 9 pf.

45
15
zu 12 gr. 7—10 gr.
6— 3—17—
3— 1—20—6 pf.
6 pf. 0— 7—5 —
3— 0— 3—8½—
für 2 Rß. 2—18—8⅘—
2— 2—18—8⅘—
5 Bch. 0— 8—4 1/10—
1— 0— 1—8 1/50—

Thlr. 214—10—1 11/50—

19.

für 13 bz. 3 kr
zu 16 ℔ für 1 fl

für 5 bz.	5 —	10 Lth.	$2\frac{2}{3}$ Qt.	
5 —	5 —	10 —	$2\frac{2}{3}$	—
3 —	3 —	6 —	$1\frac{3}{5}$	—
2 kr.	0 —	17 —	$\frac{4}{15}$	—
1 —	0 —	8 —	$2\frac{2}{15}$	—
℔	14 —	21 —	$1\frac{1}{3}$	—

20.

für 5 L. 7 s. 9 d.
zu 24 Lth. für 1 L.

	120		
für 5 s.	6		
1 —	1 —	$\frac{4}{5}$ Qt.	
1 —	1 —	$\frac{4}{5}$	—
6 d.	0 —	$2\frac{2}{5}$	—
3 —	0 —	$1\frac{1}{5}$	—
Lth.	129 —	$1\frac{1}{5}$	—
4 ℔	1 —	$1\frac{1}{5}$	—

21.

15 Thlr. 19 gr. 8 pf.
zu 5 gr. 6 pf. für 1 Thaler.

für 4 gr.	2 —	12 gr.		
1 —	0 —	15 —		
6 pf.	0 —	7 —	6	pf.
zu 12 gr.	0 —	2 —	9	—
4 —	0 —	0 —	11	—
3 —	0 —	0 —	$8\frac{1}{4}$	—
5 pf.	0 —	0 —	$1\frac{3}{8}$	—
3 —	0 —	0 —	$\frac{11}{16}$	—
Thlr.	3 —	15 —	$\frac{5}{16}$	—

II.
Die Dezimalbrüche.

Einleitung.

A. Eintheilung der Dezimalbrüche.

1) Ein Dezimalbruch heißt ein endlicher, wenn seine Dezimalen irgendwo abbrechen und sich nicht regelmäßig wiederholen;

2) ein **unendlicher**, wenn seine Dezimalen bis in's Un endliche fortgesetzt werden können und sich gleichförmi wiederholen.

3) Eine Reihe von wiederholten Dezimalen nennt man ein **Periode**.

B. Umformung der Dezimalbrüche.

Beispiele.

a. Folgende gegebene Dezimalbrüche sind in der Form von ge meinen Brüchen darzustellen.

Spezifisches Gewicht verschiedener Körper (nac Fischer).

1. Gold	19,258	=	$19\frac{258}{1000}$	=	$\frac{19258}{1000}$
2. Silber	10,784	=	$10\frac{784}{1000}$	=	$\frac{10784}{1000}$
3. Eisen	7,8	=	$7\frac{8}{10}$	=	$\frac{78}{10}$
4. Stahl	7,767	=	$7\frac{767}{1000}$	=	$\frac{7767}{1000}$
5. Marmor	2,76	=	$2\frac{76}{100}$	=	$\frac{276}{100}$
6. Sandstein	2,33	=	$2\frac{33}{100}$	=	$\frac{233}{100}$
7. Eichenholz	0,93	=	$\frac{93}{100}$	=	$\frac{93}{100}$
8. Buchenholz	0,85	=	$\frac{85}{100}$	=	$\frac{85}{100}$
9. Tannenholz	0,55	=	$\frac{55}{100}$	=	$\frac{55}{100}$
10. Schwefel	1,8	=	$1\frac{8}{10}$	=	$\frac{18}{10}$
11. Wachs	0,95	=	$\frac{95}{100}$	=	$\frac{95}{100}$
12. Kochsalz	1,918	=	$1\frac{918}{1000}$	=	$\frac{1918}{1000}$

b. Nachstehende gegebene gemeine Brüche mit dekadischen Nen nern sind in der Form von Dezimalbrüchen darzustellen.

13. Blei	$\frac{11352}{1000}$	=	$11\frac{352}{1000}$	=	11,352
14. Kupfer	$\frac{8895}{1000}$	=	$8\frac{895}{1000}$	=	8,895
15. Messing	$\frac{8395}{1000}$	=	$8\frac{395}{1000}$	=	8,395
16. Zinn	$\frac{7264}{1000}$	=	$7\frac{264}{1000}$	=	7,264
17. Sand	$\frac{1638}{1000}$	=	$1\frac{638}{1000}$	=	1,638
18. Thon	$\frac{19}{10}$	=	$1\frac{9}{10}$	=	1,9
19. Apfelbaumholz	$\frac{793}{1000}$	=		=	0,793
20. Kirschbaumholz	$\frac{715}{1000}$	=		=	0,715
21. Nußbaumholz	$\frac{664}{1000}$	=		=	0,664

22. Weingeist	$^{83}/_{100}$	=		=	0,83
23. Baumöl	$^{913}/_{1000}$	=		=	0,913
24. Salpeter	$^{19}/_{10}$	=	$1^{9}/_{10}$	=	1,9

1.
Addition.

Aufgaben.

1) Der Flächenraum der ganzen Schweiz beträgt (nach Hoffmann):

1.	Kanton	Zürich	32,33	deutsche	□ Meilen.
2.	—	Bern	120,8	—	—
3.	—	Luzern	27,7	—	—
4.	—	Uri	19,85	—	—
5.	—	Schwyz	15,96	—	—
6.	—	Unterwalden	12,4	—	—
7.	—	Glarus	13,2	—	—
8.	—	Zug	4,03	—	—
9.	—	Freiburg	23,42	—	—
10.	—	Solothurn	21,01	—	—
11.	—	Basel	8,7	—	—
12.	—	Schaffhausen	5,4	—	—
13.	—	Appenzell	6,9	—	—
14.	—	St. Gallen	35,28	—	—
15.	—	Graubünden	121,1	—	—
16.	—	Aargau	23,7	—	—
17.	—	Thurgau	12,66	—	—
18.	—	Teßin	47,88	—	—
19.	—	Waadt	61,5	—	—
20.	—	Wallis	78,38	—	—
21.	—	Neuenburg	13	—	—
22.	—	Genf	4,3	—	—
			700,5	deutsche	□ Meilen.

2.
Subtraktion.

Aufgaben.

1) Die Länge des Pendels unter dem 45sten alten oder 50sten neuen Grad der Breite beträgt für die Sexagesimalsekunden . . . . 3,058 par. Fß.
für die Dezimalsekunden 2,283 — —

Unterschied 0,775 par. Fß.

2) Die sinodische Revolution des Mondes dauert
29,5306 Tage
und die siderische Revolution 27,3216 —

Unterschied 2,2090 Tage.

3) Die Länge des siderischen Jahres beträgt
365,25638 Tage
und die des tropischen Jahres 265,24226 —

Unterschied 0,01412 Tage.

3.
Multiplikation.

Aufgaben.

1) Ein pariser Fuß hält 0,324839 Meter. Wie viel Meter beträgt der Fall, wenn ein Körper in einer Sekunde durch einen Raum von 15,09 par. Fuß fällt?

```
 0,324839
    15,09
---------
  2923551
 16241950
 324839
---------
4,90182051
```

Antwort: 4,9 Meter.

2) Ein Meter hält 3,078444 par. Fuß. Wie viel par. Fuß beträgt der Sekundenpendel zu Paris, wenn er eine Länge von 0,99384 Meter hat?

```
       3,078444
        0,99384
     ----------
       12313776
      24627552
      9235332
    27705996
   27705996
   ------------
   3,05948078496
```

Antwort: 3,0595 par. Fuß.

4.

Division.

Aufgaben.

1) Wenn 1 Grad des Aequators 342610,668 par. Fuß hält und 1 Schweizer Meile 25760 par. Fuß hat, wie viel Schweizer Meilen hält 1 Grad?

```
25760|342610,668|13,3001
     |25760     |
     -------
      85010
      77280
      -------
       77306
       77280
       -------
         26680
         25760
         -------
           920
```

Antwort: 13,3 Schweizer Meilen.

2) Ein Bern-Fuß hält 0,902777777 pariser Fuß, deren der Meter 3,078444 hält; wie viel Meter macht der Bern-Fuß aus?

```
3,078444|0,902777777|
3078444 | 902777,777|0,2932578
        | 6156888   |
          28708897
          27705996
          10029017
           9235332
           7936857
           6156888
          17799697
          15392220
           24074777
           21549108
            25256697
            24627552
              620145
```

Antwort: 1 Bern Fuß = 0,2932578 Meter.

Anhang.

A. Verkürzte Multiplikation und Division.

a. Verkürzte Multiplikation.

Beispiele.

1)
```
  0,7653478
   ×0,3576
 ----------
  22960434
   3826739
    535742
     45920
 ----------
 0,27368835
```

2)
```
   37,346859416
  ×0,007003458
 --------------
   261428015912
      112040578
       14938743
        1867342
         298774
 --------------
 0,261557161349
```

3)

7,65340958
× 2,56307

1530681916
382670479
45920457
2296022
53573

19,61622447

6)

15,7356783
× 2,564725

314713566
78678391
9441406
629426
141620
3147
786

40,3608342

)

9,34528
× 3,44776

2803584
373811
37381
6541
654
56

32,22027

7)

8,56794323
× 0,5284765

4283971615
171358864
68543545
3427177
599755
51407
4283

4,527956646

5)

2,302585
× 0,984977

20723265
1842068
92103
20723
1611
161

2,2679931

8)

0,076934210834
× 0,000003057026

230802632502
3846710541
538539475
1538684
461605

0,000000235289882807

9)

```
   644463,8042
  × 4745,554
--------------
  25778552168
   4511246629
    257785522
     32223190
      3222319
       322232
        25778
--------------
3058337783,8
```

10)

```
   8,99875477
 × 0,43429448
--------------
   3599501908
    269962643
     35995019
      1799751
       809887
        35995
         3599
          719
--------------
  3,908109521
```

11)

```
    3,141592653
 × 524,3342554
----------------
  15707963265
    628318531
    125663706
      9424777
       942477
       125664
         6283
         1571
          157
           12
----------------
 1647,2446443
```

b. Abgekürzte Division.

Beispiele.

1.

```
3,716048|7,632035|2,053804
        | 7432096|
        ---------
          199939
          185802
        ---------
           14137
           11148
        ---------
            2989
            2972
        ---------
              17
              15
        ---------
               2
```

2.

```
0,58432|0,439865|0,75278
       |  409024|
       ---------
          30841
          29216
       ---------
           1625
           1169
       ---------
            456
            409
       ---------
             47
             46
       ---------
              1
```

3.

```
15,314865|2,0000000|0,13059209
         | 15314865|
         ----------
           4685135
           4594459
         ----------
             90676
             76574
         ----------
             14102
             13782
         ----------
               320
               306
         ----------
                14
                13
         ----------
                 1
```

4.

0,3547808 | 10,926954 | 30,79917

10643424

283530

248346

35184

31930

3254

3192

62

35

27

24

3

5.

3,89471 | 27,96348 | 7,17986

2726297

70051

38947

31104

27263

3841

3505

336

311

25

23

2

6.

0,787694 | 1,000000 | 1,26953
| 787694 |

212306
157539

54767
47261

7506
7088

418
394

24
23

1

7.

132,98878 | 130,000000 | 0,977526
| 119 689902 |

10310098
9309215

1000883
930921

69962
66494

3468
2660

808
798

10

8.

```
9,34528|32,22027|3,44776
       |28 03584|
        --------
          418443
          373811
         -------
           44632
           37381
          ------
            7251
            6541
          ------
             710
             654
           -----
              56
              56
             ---
               0
```

9.

```
0,0035843297|3,00000000|836,97659
            |2 86746376|
            -----------
              13253624
              10752989
             ---------
               2500635
               2150597
              --------
                350038
                322588
               -------
                 27450
                 25090
                ------
                  2360
                  2150
                 -----
                   210
                   179
                  ----
                    31
                    31
                   ---
                     0
```

B. Verwandlung der Brüche.

a. Verwandlung der gemeinen Brüche in Dezimalbrüche.

1. $\frac{1}{8} = 0{,}125$
2. $\frac{3}{8} = 0{,}375$
3. $\frac{5}{8} = 0{,}625$
4. $\frac{7}{8} = 0{,}875$
5. $\frac{1}{16} = 0{,}0625$
6. $\frac{3}{16} = 0{,}1875$
7. $4\frac{5}{16} = 4{,}3125$
8. $6\frac{7}{16} = 6{,}4375$
9. $2\frac{9}{16} = 2{,}5625$
10. $8\frac{11}{16} = 8{,}6875$
11. $\frac{93}{16} = 5{,}8125$
12. $\frac{63}{16} = 3{,}9375$
13. $\frac{1}{9} = 0{,}11111\ldots$
14. $\frac{2}{9} = 0{,}22222\ldots$
15. $\frac{4}{9} = 0{,}44444\ldots$
16. $\frac{5}{9} = 0{,}5555\ldots$
17. $\frac{7}{9} = 0{,}7777\ldots$
18. $\frac{8}{9} = 0{,}8888\ldots$
19. $5\frac{1}{12} = 5{,}08333\ldots$
20. $9\frac{5}{12} = 9{,}41666\ldots$
21. $7\frac{7}{12} = 7{,}58333\ldots$
22. $3\frac{11}{12} = 3{,}91666\ldots$
23. $\frac{7}{3} = 2{,}3333\ldots$
24. $\frac{5}{3} = 1{,}6666\ldots$
25. $\frac{1}{7} = 0{,}142857\ldots$
26. $\frac{2}{7} = 0{,}285714\ldots$
27. $\frac{3}{7} = 0{,}428571\ldots$
28. $4\frac{4}{7} = 4{,}571428\ldots$
29. $7\frac{5}{7} = 7{,}714285\ldots$
30. $\frac{48}{7} = 6{,}857142\ldots$

b. Verwandlung der Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

1. $0{,}5 = \frac{1}{2}$
2. $0{,}25 = \frac{1}{4}$
3. $0{,}75 = \frac{3}{4}$
4. $2{,}2 = 2\frac{1}{5} = \frac{11}{5}$
5. $4{,}4 = 4\frac{2}{5} = \frac{22}{5}$
6. $3{,}6 = 3\frac{3}{5} = \frac{18}{5}$
7. $5{,}8 = 5\frac{4}{5} = \frac{29}{5}$
8. $0{,}16666\ldots = \frac{1}{6}$
9. $0{,}83333\ldots = \frac{5}{6}$
10. $6{,}06666\ldots = 6\frac{1}{15} = \frac{91}{15}$
11. $8{,}13333\ldots = 8\frac{2}{15} = \frac{122}{15}$
12. $7{,}46666\ldots = 7\frac{7}{15} = \frac{112}{15}$
13. $9{,}53333\ldots = 9\frac{8}{15} = \frac{143}{15}$
14. $0{,}076923\ldots = \frac{1}{13}$
15. $0{,}923076\ldots = \frac{12}{13}$
16. $1{,}461538\ldots = 1\frac{6}{13} = \frac{19}{13}$

Aufgaben.

1) Der Bogen ist dem Halbmesser gleich bei $63^0,661977$ französischer Eintheilung; wie viel beträgt dieses nach unsern Graden, Minuten und Sekunden?

Auflösung.

100 französische Grade sind 90 gewöhnliche Grade, also sind

$$63{,}661977 \text{ französische Grade} = \frac{63{,}661977 \times 90}{100}$$

$= 57^0,2957795 = 57^0 - 17' - 44'' - 48'''$ nach unserer Eintheilung.

2) Wie viel betragen aber $57^0,-17'-44''-48'''$ unserer Eintheilung nach der französischen?

Auflösung.

90 gewöhnliche Grade sind 100 französische Grade, also sind $57^0,-17'-44''-48''' = 57^0,2957795$ nach unserer Eintheilung $= \frac{57{,}2957795 \times 100}{90} = 63{,}661977$ französische Grade.

3) Ein Kubikzoll Gold wiegt ungefähr 19 mal so viel als ein Kubikzoll Wasser, ein Kubikzoll Kupfer aber nur 9 mal so viel. Wie groß muß ein Stück Kupfer sein, wenn es eben so viel wiegen soll, wie $^3/_4$ Kubikzoll Gold?

Auflösung.

Das Gold ist $^{19}/_9 = 2{,}11111\ldots$ mal so schwer als das Kupfer; das Stück Kupfer muß also $2{,}11111\ldots$ größer sein, als $^3/_4$ Kubikzoll Gold, wenn es gleich schwer sein soll; dieses giebt also $0{,}75 \times 2{,}11111\ldots = 1{,}58\ldots$ Kubikzoll.

Tabellen der in- und ausländischen Maße.

Quellen.

Vega's logarith. trigonometr. Handbuch.

Nelkenbrecher's Taschenbuch der Münz- Maß- und Gewichtkunde, 14te Ausgabe.

Eitelwein's Vergleichungen der preußischen Maße und Gewichte.

Wild, über allgemeines Maß und Gewicht, 2 Thle.

Niemann's Handbuch der Münzen, Maße und Gewichte aller Länder.

Erste Tabelle.

Inländische Maße.

Namen der Cantone.	Längenmaße		Flächenmaße		Körpermaße	
Ein Fuß in	Par. Fuß	Meter	Par. □ Fuß	□ Meter	Par. Kubik-Fuß	Kubik-Meter
Zürich . .	0,92777	0,30138	0,86086	0,09083	0,79850	0,02737
Bern . .	0,90277	0,29326	0,81533	0,08600	0,73569	0,02522
Luzern .	0,96618	0,31385	0,93382	0,09850	0,90182	0,03092
Uri . . .	0,92777	0,30138	0,86086	0,09083	0,79850	0,02737
Schwyz	0,92777	0,30138	0,86086	0,09083	0,79850	0,02737
Unterwalden	0,96618	0,31385	0,93382	0,09850	0,90182	0,03092
Glarus . .	0,92777	0,30138	0,86086	0,09083	0,79850	0,02737
Zug . .	0,92777	0,30138	0,86086	0,09083	0,79850	0,02737
Freiburg .	0,90277	0,29326	0,81533	0,08600	0,73569	0,02522
Solothurn	0,90277	0,29326	0,81533	0,08600	0,73569	0,02522
Basel . .	0,93750	0,30453	0,87922	0,09274	0,82389	0,02825
Schaffhausen	0,92777	0,30138	0,86086	0,09083	0,79850	0,02737
Appenzell	0,96618	0,31385	0,93382	0,09850	0,90182	0,03092
St. Gallen	0,96618	0,31385	0,93382	0,09850	0,90182	0,03092
Graubünden	0,92361	0,30003	0,85337	0,09001	0,78783	0,02701
Aargau .	0,90277	0,29326	0,81533	0,08600	0,73569	0,02522
Thurgau .	0,96618	0,31385	0,93382	0,09850	0,90182	0,03092
Teßin . .	1,22222	0,39700	1,49380	0,15761	1,82575	0,06257
Waadt .	0,92353	0,30000	0,85320	0,09000	0,78769	0,02700
Wallis .	1,00000	0,32484	1,00000	0,10550	1,00000	0,03428
Neuenburg	0,92361	0,30003	0,85337	0,09001	0,78783	0,02701
Genf . .	1'00000	0,32484	1,00000	0,10550	1,00000	0,03428

Zweite Tabelle.

Ausländische Maße.

Ein Fuß in	beträgt in			
	Paris		Berlin	London
	Meter	Königsfuß	Rheinl. Fß.	Engl. Fß.
Amsterdam . .	0,28305	0,87137	0,90187	0,92857
Berlin . . .	0,31385	0,96618	1,00000	1,02960
Braunschweig	0,28536	0,87847	0,90922	0,93613
Bremen . .	0,28919	0,89028	0,92144	0,94871
Carlsruhe . .	0,30000	0,92353	0,95586	0,98415
Darmstadt .	0,25000	0,79661	0,79656	0,82022
Dresden . .	0,28326	0,87200	0,90252	0,92924
Frankfurt a. M.	0,28460	0,87612	0,90679	0,93363
Gotha . . .	0,28762	0,88541	0,91641	0,94353
Hamburg . .	0,28649	0,88194	0,91281	0,93983
Hannover . .	0,29199	0,89889	0,93030	0,95789
Kopenhagen	0,31362	0,96546	0,99926	1,02884
Leipzig . . .	0,28265	0,87014	0,90059	0,92725
Lissabon . .	0,33860	1,04236	1,07884	1,11078
London . . .	0,30483	0,93840	0,97125	1,00000
Madrid . .	0,28265	0,87014	0,90059	0,92725
Mailand . .	0,39702	1,22222	1,26500	1,30245
München . .	0,29186	0,89847	0,92992	0,95745
Neapel . . .	0,26363	0,81157	0,83998	0,86494

Fortsetzung.

Ein Fuß in	beträgt in			
	Paris		Berlin	London
	Meter	Königsfuß	Rheinl. Fß.	Engl. Fß.
Nürnberg . .	0,30379	0,93521	0,96794	0,99659
Palermo . .	0,24205	0,74514	0,77122	0,79405
Paris K. Fuß	0,32484	1,00000	1,03500	1,06564
Paris Meter	1,00000	3,078444	3,18620	3,28051
Petersburg .	0,30453	0,93750	0,97031	0,99915
Rom . . .	0,29461	0,90694	0,93869	0,96647
Stockholm .	0,29684	0,91380	0,94578	0,97378
Stuttgard .	0,28649	0,88194	0,91281	0,93983
Turin . . .	0,34243	1,05416	1,09106	1,12349
Venedig . .	0,34740	1,06944	1,10688	1,13964
Warschau . .	0,28800	0,88658	0,91762	0,94490
Weimar . .	0,28198	0,86805	0,89844	0,92503
Wien . . .	0,31610	0,97310	1,00716	1,03698

Zweiter Theil.

Die Buchstabenrechnung.

Erster Abschnitt.

Die vier Hauptrechnungsarten mit einfachen und zusammengesetzten Größen.

I.

Addition.

1.

Addition einfacher Größen.

1) $\begin{array}{r} a \\ a \\ \hline 2a \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} 7a \\ 5a \\ \hline 12a \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} a \\ b \\ \hline a+b \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} a \\ -a \\ \hline 0 \end{array}$

5) $\begin{array}{r} 17a \\ -6a \\ \hline 11a \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 5a \\ -9a \\ \hline -4a \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a-b \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} -7a \\ b \\ \hline -7a+b \\ =b-7a \end{array}$

9) $\begin{array}{r} -a \\ -a \\ \hline -2a \end{array}$ 10) $\begin{array}{r} -3a \\ -8a \\ \hline -11a \end{array}$ 11) $\begin{array}{r} -8a \\ -3b \\ \hline -8a-3b \\ =-(8c+3b) \end{array}$ 12) $\begin{array}{r} 3a \\ -5a \\ 8a \\ \hline 6a \end{array}$

2.
Addition zusammengesetzter Größen.

1)
$$\begin{array}{rrr} 7a & -5b & +3c \\ 2a & -3b & -7c \\ \hline 9a & -8b & -4c \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{rrrr} 5a & +4b & -3c & -7d \\ 3a & -12b & +7c & -10d \\ \hline 8a & -8b & +4c & -17d \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{rrrrrr} 16a & -5b & +10c & -9d & & \\ 3a & +18b & -5c & -7d & +3e & \\ -7a & -2b & & -3d & +5e & -9f \\ 11a & -3b & +2c & +8d & & +7f \\ \hline 23a & +8b & +7c & -11d & +8e & -2f \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{rrrr} 8a & +b & & \\ 2a & -b & +c & \\ -3a & +5b & & +2d \\ & -6b & -3c & +3d \\ -5a & & +7c & -2d \\ \hline 2a & -b & +5c & +3d \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{rrrr} 7a & -6b & +5c & -d \\ -a & -3b & & -d \\ -a & +b & -3c & +7d \\ -2a & +3b & +3c & -d \\ a & +8b & -5c & +d \\ \hline 4a & +3b & & +5d \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{rrrrrr} -a & +3b & -c & -115d & +6e & -5f \\ 3a & -2b & -3c & -d & +27e & \\ & 5b & -8c & & +3e & -7f \\ -7a & -6b & +17c & +9d & -5e & +11f \\ -3a & & -5c & -2d & +6e & -6f \\ \hline -8a & & & -109d & +37e & -10f \end{array}$$

II.

Subtraktion.

1.

Subtraktion einfacher Größen.

1) $\begin{array}{r} a \\ a \\ \hline 0 \end{array}$
2) $\begin{array}{r} 7a \\ 3a \\ \hline 4a \end{array}$
3) $\begin{array}{r} 5a \\ -11b \\ \hline -6a \end{array}$
4) $\begin{array}{r} 7a \\ 5b \\ \hline 7a-5b \end{array}$

5) $\begin{array}{r} a \\ -a \\ \hline 2a \end{array}$
6) $\begin{array}{r} 8a \\ -a \\ \hline 9a \end{array}$
7) $\begin{array}{r} 6a \\ -5a \\ \hline 11a \end{array}$
8) $\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline a+b \end{array}$

9) $\begin{array}{r} 3a \\ -2b \\ \hline 3a+2b \end{array}$
10) $\begin{array}{r} -9a \\ 3a \\ \hline -12a \end{array}$
11) $\begin{array}{r} -6a \\ -5a \\ \hline -a \end{array}$
12) $\begin{array}{r} -3a \\ -5b \\ \hline -3a+5b \\ =5b-3a \end{array}$

2.

Subtraktion zusammengesetzter Größen.

1) $\begin{array}{rrr} 3a & -2b & +6 \\ 2a & -7b & -3 \\ - & + & + \\ \hline a & +5b & +9 \end{array}$

2) $\begin{array}{rrrr} 2a & -b & -c & -d \\ 9a & -3b & +4c & -d \\ - & + & - & + \\ \hline -7a & +2b & -5c & \end{array}$

3) $\begin{array}{rrr} 3a & -2b & \\ -9a & -7b & -8c \\ - & + & + \\ \hline -6a & +5b & +8c \end{array}$

4) $\begin{array}{rrrrr} -a & -5b & +7c & -d & \\ & -4b & -3c & +2d & +3e \\ & + & + & - & - \\ \hline -a & -b & +10c & -3d & -3e \end{array}$

5)
$$\begin{array}{l}
-3a+b-8c+7d-5e-7f-13g \\
-2a+2b-9c+8d+7e-7f-g \\
+\quad-\quad+\quad-\quad-\quad+\quad+ \\
\hline
-a+b+c-d-12e-12g
\end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l}
8a-5b-3c-7d+5e-8f+3g+17k \\
-a-5b+3c+2d-4e-7f+9g-5k \\
+\quad+\quad-\quad-\quad+\quad+\quad-\quad+ \\
\hline
9a-6c-9d+9e-f-6g+22k
\end{array}$$

III.

Multiplikation.

1.

Multiplikation einfacher Größen.

1) $\begin{array}{r} a \\ b \\ \hline ab \end{array}$ 2) $\begin{array}{r} a \\ -b \\ \hline -ab \end{array}$ 3) $\begin{array}{r} -a \\ b \\ \hline -ab \end{array}$ 4) $\begin{array}{r} -a \\ -b \\ \hline +ab \end{array}$

5) $\begin{array}{r} ab \\ c \\ \hline abc \end{array}$ 6) $\begin{array}{r} 6a \\ 7b \\ \hline 42ab \end{array}$ 7) $\begin{array}{r} abc \\ -de \\ \hline -abcde \end{array}$ 8) $\begin{array}{r} -5abc \\ -7ad \\ \hline 35aabcd \end{array}$

2.

Multiplikation zusammengesetzter Größen.

1)
$$\begin{array}{l}
a+b \\
a+b \\
\hline
aa+ab \\
\quad+ab+bb \\
\hline
aa+2ab+bb
\end{array}$$

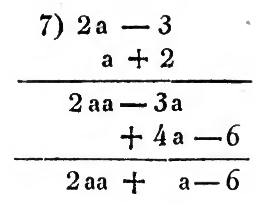
2)
$$\begin{array}{l}
a+b \\
a-b \\
\hline
aa+ab \\
\quad-ab-bb \\
\hline
aa-bb
\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l} a - b \\ a - b \\ \hline aa - ab \\ \quad - ab + bb \\ \hline aa - 2ab + bb \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l} a + b \\ c + d \\ \hline ac + bc \\ \quad + ad + bd \\ \hline ac + ad + bc + bd \end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l} a + b + c \\ a + b - c \\ \hline aa + ab + ac \\ \quad + ab + bb + bc \\ \qquad - ac - bc - cc \\ \hline aa + 2ab + bb - cc \end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l} a + b - b \\ d - e \\ \hline ad + bd - cd \\ \quad - ae - be + ce \\ \hline ad - ae + bd - be - cd + ce \end{array}$$



7)
$$\begin{array}{r} 2a - 3 \\ a + 2 \\ \hline 2aa - 3a \quad \\ + 4a - 6 \\ \hline 2aa + \quad a - 6 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{l} 4aa - 6a + 9 \\ 2a + 3 \\ \hline 8aaa - 12aa + 18a \\ \quad + 12aa - 18a + 27 \\ \hline Saaa + 27 \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{l} 3aa - 2ab - bb \\ 2a - 4b \\ \hline 6aaa - 4aab - 2abb \\ \quad - 12aab + 8abb + 4bbb \\ \hline 6aaa - 16aab + 6abb + 4bbb \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{l} 5aa - 3ab + 7bb \\ 3a - b \\ \hline 15aaa - 9aab + 21abb \\ \quad - 5aab + 3abb - 7bbb \\ \hline 15aaa - 14aab + 24abb - 7bbb \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{l} a + b + c + d \\ a - b - c - d \\ \hline aa + ab + ac + ad \\ \quad - ab - bb - bc - bd \\ \quad\quad - ac - bc - cc - cd \\ \quad\quad\quad - ad - bd - cd - dd \\ \hline aa - bb - 2bc - 2bd - cc - 2cd - dd \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{l} aa + bb + cc - ab - ac - bc \\ a + b + c \\ \hline aaa + abb + acc - aab - aac - abc \\ \quad + aab + bbb + bcc - abb - abc - bbc \\ \quad\quad + aac + bbc + ccc - abc - acc - bcc \\ \hline aaa + bbb + ccc - 3abc \end{array}$$

IV.

Division.

1.

Division einfacher Größen.

1) $b \,|\, a \,|\, \frac{a}{b}$ 2) $b \,|\, -a \,|\, -\frac{a}{b}$ 3) $-b \,|\, a \,|\, -\frac{a}{b}$

4) $-b \,|\, -a \,|\, \frac{a}{b}$ 5) $-4b \,|\, 12a \,|\, -\frac{3a}{b}$

6) $3b \mid 5a \mid \frac{5a}{3b}$

7) $4b \mid -14a \mid -\frac{7a}{2b}$

8) $a \mid abc \mid bc$

9) $ad \mid abc \mid \frac{bc}{d}$

10) $-8abc \mid -12acd \mid \frac{3d}{2b}$

2.

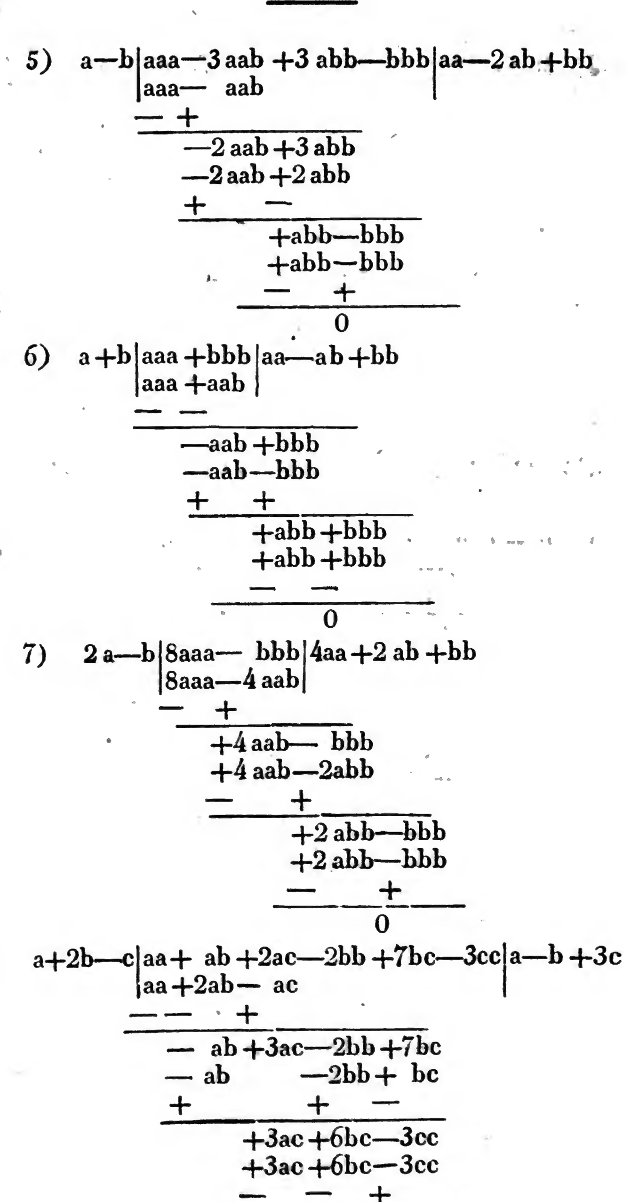
Division zusammengesetzter Größen.

1)
$$\begin{array}{r|l|l} b-c & ab-ac & a \\ & ab-ac & \\ \hline & -\;+ & \\ & 0 & \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{r|l|l} a-b & ac-bc+ad-bd & c+d \\ & ac-bc & \\ & -\;+ & \\ \hline & \qquad ad-bd & \\ & \qquad ad-bd & \\ & \qquad -\;+ & \\ \hline & \qquad 0 & \end{array}$$

3)
$$\begin{array}{r|l|l} a+b & aa-bb & a-b \\ & aa+ab & \\ & -\;- & \\ \hline & -ab-bb & \\ & -ab-bb & \\ & +\;\;+ & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

4)
$$\begin{array}{r|l|l} 3a-2b & 18aa-8bb & 6a+4b \\ & 18aa-12ab & \\ & -\;\;\;+ & \\ \hline & +12ab-8bb & \\ & +12ab-8bb & \\ & -\;\;\;+ & \\ \hline & 0 & \end{array}$$



5) a—b | aaa—3 aab +3 abb—bbb | aa—2 ab +bb
aaa— aab
— +
—2 aab +3 abb
—2 aab +2 abb
+ —
+abb—bbb
+abb—bbb
— +
0

6) a +b | aaa +bbb | aa—ab +bb
aaa +aab
— —
—aab +bbb
—aab—bbb
+ +
+abb +bbb
+abb +bbb
— —
0

7) 2 a—b | 8aaa— bbb | 4aa +2 ab +bb
8aaa—4 aab
— +
+4 aab— bbb
+4 aab—2abb
— +
+2 abb—bbb
+2 abb—bbb
— +
0

8) a+2b—c | aa+ ab +2ac—2bb +7bc—3cc | a—b +3c
aa +2ab— ac
— — +
— ab +3ac—2bb +7bc
— ab —2bb + bc
+ + —
+3ac +6bc—3cc
+3ac +6bc—3cc
— — +
0

9) $2a+3d \,|\, 4aa+6ab-4ad+9bd-15dd \,|\, 2a+3b-5d$

$4aa \qquad +6ad$

$- \qquad -$

$+6ab-10ad+9bd$

$+6ab \qquad +9bd$

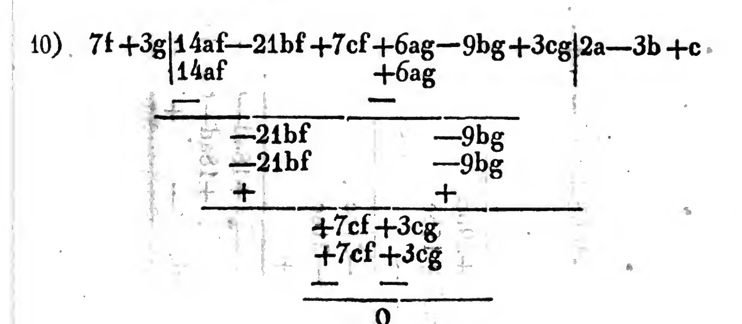
$- \qquad -$

$-10ad-15dd$

$-10ad-15dd$

$+ \qquad +$

0



10) $7f+3g \,|\, 14af-21bf+7cf+6ag-9bg+3cg \,|\, 2a-3b+c$

$14af \qquad +6ag$

$- \qquad -$

$-21bf \qquad -9bg$

$-21bf \qquad -9bg$

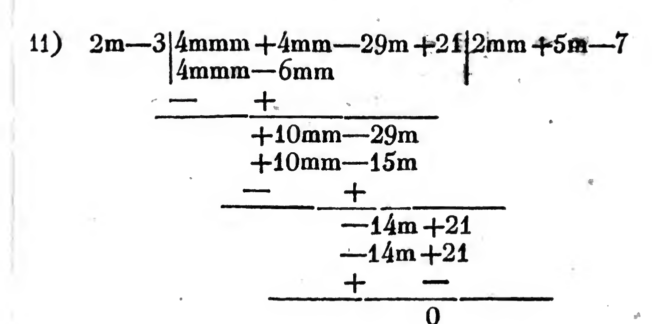
$+ \qquad +$

$+7cf+3cg$

$+7cf+3cg$

$- \qquad -$

0



11) $2m-3 \,|\, 4mmm+4mm-29m+21 \,|\, 2mm+5m-7$

$4mmm-6mm$

$- \qquad +$

$+10mm-29m$

$+10mm-15m$

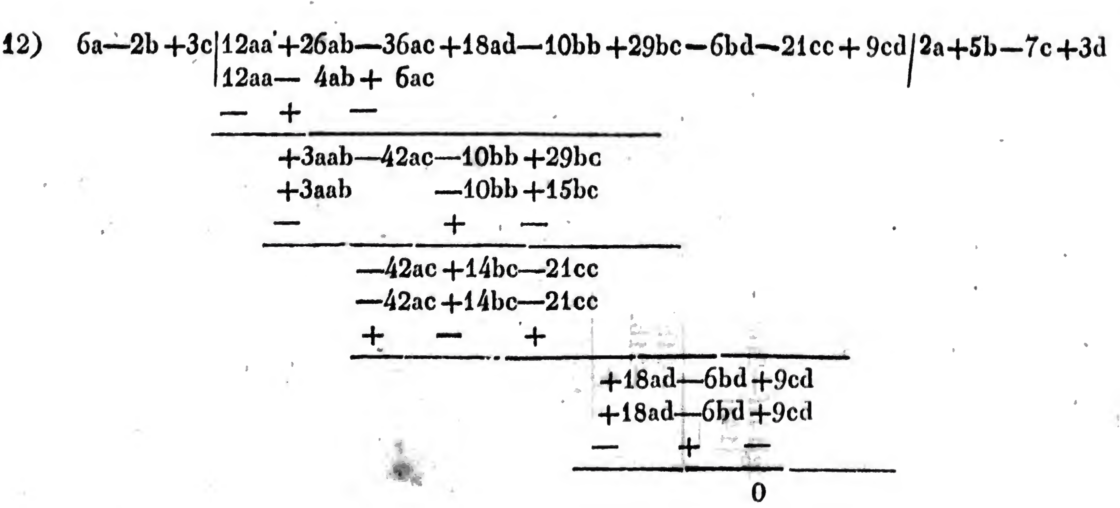
$- \qquad +$

$-14m+21$

$-14m+21$

$+ \qquad -$

0



12) 6a—2b+3c | 12aa+26ab—36ac+18ad—10bb+29bc—6bd—21cc+9cd | 2a+5b—7c+3d

12aa— 4ab+ 6ac
— + —

+3aab—42ac—10bb+29bc
+3aab —10bb+15bc
— + —

—42ac+14bc—21cc
—42ac+14bc—21cc
+ — +

+18ad—6bd+9cd
+18ad—6bd+9cd
— + —

0

13) $17c+3d-4f \mid 119cc-200cd+408ce-113cf-39dd+72de+37df-96ef+20ff \mid 7c-13d+24e-5f$

$$
\begin{array}{l}
119cc+21cd \quad -28cf \\
- \quad - \quad + \\
\hline
-221cd-85cf-39dd+37df \\
-221cd \quad -39dd+52df \\
+ \quad + \quad - \\
\hline
+408ce-15df+72de-96ef \\
+408ce \quad +72de-96ef \\
- \quad - \quad + \\
\hline
-85cf-15df+20ff \\
-85cf-15df+20ff \\
+ \quad + \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$

14) $6xx - 4xy - yy \mid 72xxxx - 78xxxy - 10xxyy + 17xyyy + 3yyyy \mid 12xx - 5xy - 3yy$

$$
\begin{array}{l}
72xxxx - 48xxxy - 12xxyy \\
- \quad + \quad + \\
\hline
-30xxxy + 2xxyy + 17xyyy \\
-30xxxy + 20xxyy + 5xyyy \\
+ \quad - \quad - \\
\hline
-18xxyy + 12xyyy + 3yyyy \\
-18xxyy + 12xyyy + 3yyyy \\
+ \quad - \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$

15) a + b + c | aaa + bbb + ccc — 3abc | aa — ab — ac — bc + bb + cc
aaa + aab + aac
— — —

— aab — aac — 3abc
— aab — abb — abc
+ + +

— aac — 2abc + abb
— aac — abc — acc
+ + +

— abc + abb + acc
— abc — bbc — bcc
+ + +

+ abb + acc + bbc + bcc + bbb
+ abb + bbc + bbb
— — —

+ acc + bcc + ccc
+ acc + bcc + ccc
— — —

0

V.

Partial-Division.

1) $1-b \,|\, 1 \quad |\, 1+b+bb+bbb+bbbb+\ldots$

$1-b$

$-\;+$

$+b$

$+b-bb$

$-\;+$

$+bb$

$+bb-bbb$

$-\;+$

$+bbb$

$+bbb-bbbb$

$-\;+$

$+bbbb$

$+bbbb-bbbbb$

$-\;+$

$+bbbbb$

2) $1+b \,|\, 1 \quad |\, 1-b+bb-bbb+bbbb-\ldots$

$1+b$

$-\;-$

$-b$

$-b-bb$

$+\;+$

$+bb$

$+bb+bbb$

$-\;-$

$-bbb$

$-bbb-bbbb$

$+\;+$

$+bbbb$

$+bbbb+bbbbb$

$-\;-$

$-bbbbb$

3) $1-x \mid a \mid a+ax+axx+axxx+xxxx+ \ldots$

$a-ax$

$-\;+$

$+ax$

$+ax-axx$

$-\;\;+$

$+axx$

$+axx-axxx$

$-\;\;+$

$+axxx$

$+axxx-axxxx$

$-\;\;+$

$+axxxx$

$+axxxx-axxxxx$

$-\;\;+$

$+axxxxx$

4) $1+x \mid a \mid a-ax+axx-axxx+axxxx- \ldots$

$a+ax$

$-\;-$

$-ax$

$-ax-axx$

$+\;\;+$

$+axx$

$+axx+axxx$

$-\;\;-$

$-axxx$

$-axxx-axxxx$

$+\;\;+$

$+axxxx$

$+axxxx+axxxxx$

$-\;\;-$

$-axxxxx$

5) $1-x\,\big|\,\begin{array}{l}1+x\\ 1-x\end{array}\big|\,1+2x+2xx+2xxx+2xxxx+\ldots$

$$\begin{array}{l}
-\;+\\
\hline
+2x\\
+2x-2xx\\
-\quad+\\
\hline
+2xx\\
+2xx-2xxx\\
-\quad+\\
\hline
+2xxx\\
+2xxx-2xxxx\\
-\quad+\\
\hline
+2xxxx\\
+2xxxx-2xxxxx\\
-\quad+\\
\hline
+2xxxxx
\end{array}$$

Zweiter Abschnitt.

Von den Brüchen.

I.

Die einfachen und die doppelten Brüche.

1.

Einfache Brüche.

Addition und Subtraktion.

1) $\frac{5a}{m}+\frac{2a}{m}-\frac{3a}{m}=\frac{7a}{m}-\frac{3a}{m}=\frac{4a}{m}$

2) $\frac{3a}{m}+\frac{2b}{m}-\frac{c}{m}=\frac{3a+2b-c}{m}$

3) $\frac{a}{b}+c=\frac{a}{b}+\frac{bc}{b}=\frac{a+bc}{b}$

4) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} + \frac{bc}{bd} = \frac{ad + bc}{bd}$

5) $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} + \frac{e}{f} = \frac{adf}{bdf} + \frac{bcf}{bdf} + \frac{bde}{bdf} =$
$\frac{adf + bcf + bde}{bdf}$

6) $\frac{1}{a} - \frac{1}{b} - \frac{1}{c} = \frac{bc}{abc} - \frac{ac}{abc} - \frac{ab}{abc} =$
$\frac{bc - ac - ab}{abc}$

7) $\frac{5a}{3b} - \frac{3c}{2d} = \frac{10ad - 9bc}{6bd}$

8) $\frac{6a - 4b}{3} - \frac{3a}{2} = \frac{12a - 8b - 9a}{6} = \frac{3a - 8b}{6}$

9) $\frac{a}{3b + 2c} + d = \frac{a + 3bd + 2cd}{3b + 2c} = \frac{a + d(3b + 2c)}{3b + 2c}$

Multiplikation.

1) $17a \times \frac{3}{4}b = \frac{51}{4}ab = \frac{51ab}{4}$

2) $\frac{3a}{2} \times \frac{5b}{4} = \frac{15ab}{8}$

3) $\frac{3}{8}a \times -\frac{2}{3}b = -\frac{6}{24}ab = -\frac{ab}{4}$

4) $-\frac{5a}{4} \times -\frac{3b}{7} = \frac{15ab}{28}$

5) $-\frac{1}{2}abd \times \frac{1}{4}cef = \frac{1}{8}abcdef$

6) $\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$

7) $-\frac{3fh}{5cde} \times ag = -\frac{3afgh}{5cde}$

8) $\frac{1}{fgh} \times 4cd = \frac{4cd}{fgh}$

9) $\frac{5ac}{bde} \times -\frac{7bfg}{3ad} = -\frac{35abcfg}{3abdde} = -\frac{35cfg}{3dde}$

10) $-\frac{h}{2fg} \times -\frac{g}{3h} = \frac{gh}{6fgh} = \frac{1}{6f}$

11) $-\frac{a}{b} \times b = -\frac{ab}{b} = -a$

12) $\frac{1}{a} \times \frac{3ac}{x} \times \frac{c}{x} = \frac{3acc}{axx} = \frac{3cc}{xx}$

Division.

1) $\frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{ad}{bc}$

2) $\frac{3afx}{bc} : \frac{2fxx}{5cde} = \frac{15acdefx}{2bcfxx} = \frac{15ade}{2bx}$

3) $3fm : -\frac{3am}{5bg} = -\frac{15bfgm}{3am} = -\frac{5bfg}{a}$

4) $-\frac{2ay}{5bx} : 3ac = -\frac{2ay}{15abcx} = -\frac{2y}{15bcx}$

5) $\frac{1}{7fggl} : \frac{1}{4fln} = \frac{4fln}{7fggl} = \frac{4n}{7gg}$

6) $\frac{3}{4}ac : \frac{5}{6}abd = \frac{18ac}{20abd} = \frac{9c}{10bd}$

2.

Die doppelten Brüche.

Verwandlung in einfache Brüche.

1) $$\frac{\frac{a}{b}}{c} = \frac{a}{bc}$$

2) $$\frac{a}{\frac{b}{c}} = \frac{ac}{b}$$

3) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}} = \frac{ad}{bc}$$

4) $$\frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{\frac{d}{e}} = \frac{\frac{a}{bc}}{\frac{d}{e}} = \frac{ae}{bcd}$$

5) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{\frac{c}{d}}{e}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{de}} = \frac{ade}{bc}$$

6) $$\frac{\frac{a}{\frac{b}{c}}}{\frac{d}{e}} = \frac{\frac{ac}{b}}{\frac{d}{e}} = \frac{ace}{bd}$$

7) $$\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{\frac{d}{e}}} = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{ce}{d}} = \frac{ad}{bce}$$

8) $$\frac{\frac{\frac{a}{b}}{c}}{\frac{d}{\frac{e}{f}}} = \frac{\frac{a}{bc}}{\frac{df}{e}} = \frac{ae}{bcdf}$$

II.

Die Kettenbrüche.

Beispiele.

1.

Gegeb. Brüche	Quotienten	Berechnung.		Näherungswerthe.
$^{351}/_{965}$	2, 1, 2, 1, 87	$\frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$	1. $\frac{1}{2}=0,5$
		$\frac{1\times1+0}{1\times2+1}$	$= \frac{1}{3}$	2. $\frac{1}{3}=0,33333...$
		$\frac{2\times\ \ +1}{2\times3+2}$	$= \frac{3}{8}$	3. $\frac{3}{8}=0,375$
		$\frac{1\times3+1}{1\times8+3}$	$= \frac{4}{11}$	4. $\frac{4}{11}=0,36363...$
		$\frac{87\times4+3}{87\times11+8}$	$= \frac{351}{965}$	5. $\frac{351}{965}=0,36373...$

2.

Gegeb. Brüche	Quotienten	Berechnung.	Näherungswerthe.
$\frac{251}{764}$	3, 22, 1, 4, 2,	$\frac{1}{3} = \frac{1}{3}$	1. $\frac{1}{3}$ =0,333333...
		$\frac{22\times1+0}{22\times3+1} = \frac{22}{67}$	2. $\frac{22}{67}$ =0,328358...
		$\frac{1\times22+1}{1\times67+3} = \frac{23}{70}$	3. $\frac{23}{70}$ =0,325571...
		$\frac{4\times23+2}{4\times70+67} = \frac{114}{347}$	4. $\frac{114}{347}$=0,328530...
		$\frac{2\times114+23}{2\times347+70} = \frac{251}{764}$	5. $\frac{251}{764}$=0,328534...

3.

$\frac{317}{1343}$	4, 4, 4, 2, 2, 3	$\frac{1}{4} = \frac{1}{4}$	1. $\frac{1}{4}$ =0,25
		$\frac{4\times1+0}{4\times4+1} = \frac{4}{17}$	2. $\frac{4}{17}$ =0,2352941...
		$\frac{4\times4+1}{4\times17+4} = \frac{17}{72}$	3. $\frac{17}{72}$ =0,2361111...
		$\frac{2\times17+4}{2\times72+17} = \frac{38}{161}$	4. $\frac{38}{161}$=0,2360248...
		$\frac{2\times38+17}{2\times161+72} = \frac{93}{394}$	5. $\frac{93}{394}$=0,2360406...
		$\frac{3\times93+38}{3\times394+161} = \frac{317}{1343}$	6. $\frac{317}{1343}$=0,2360387...

Aufgabe.

Die Peripherie eines Kreises verhält sich zum Diameter desselben wie 3,14159265358979 zu 1. Wie läßt sich dieses Verhältniß durch kleinere Zahlen darstellen?

Auflösung.

Quotienten	Peripherie.	Diameter.	Verhältniß in Dezimal-Brüchen.
3	3	1	3
7	22	7	3,142...
15	333	106	3,14150...
1	355	113	3,1415929...
292	103993	33102	3,1415926531...
u. s. w.			

Dritter Abschnitt.

Von den Verhältnissen und Proportionen.

I.

Die Verhältnisse.

1.

Von den arithmetischen Verhältnissen.

Bezeichnet man:
durch a das erste Glied,
— b das zweite Glied,
— d die Differenz;
so erhält man, wenn zwei dieser Größen gegeben sind, den Werth der dritten aus folgender Tabelle:

Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1	a, b	d	a — b
2	a, d	b	a — d
3	b, d	a	b + d

Beispiele.

Nro.	Gegeben.	Rechnung.
1	a = 9, b = 5	d = 9—5 = 4
2	a = 14, b = 8	d = 14—8 = 6
3	a = 12, d = 5	b = 12—5 = 7
4	a = 15, d = 6	b = 15—6 = 9
5	b = 7, d = 3	a = 7+3 = 10
6	b = 9, d = 5	a = 9+5 = 14

2.

Von den geometrischen Verhältnissen.

Bezeichnet man
durch a das erste Glied,
— b das zweite Glied,
— e den Exponent;
so erhält man, wenn zwei dieser Größen gegeben sind, den Werth der dritten aus folgender Tabelle:

Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
1	a, b	e	$a = \frac{a}{b}$
2	a, e	b	$b = ae$
3	b, e	a	$a = \frac{b}{e}$

Beispiele.

Nro.	Gegeben.	Rechnung.
1	$a = 3,\ b = 15$	$e = {}^{15}/_{3} = 5$
2	$a = 8,\ b = 24$	$e = {}^{24}/_{8} = 3$
3	$a = 4,\ e = 3$	$b = 4 \times 3 = 12$
4	$a = 6,\ e = 5$	$b = 6 \times 5 = 30$
5	$b = 20,\ e = 5$	$a = {}^{20}/_{5} = 4$
6	$b = 18,\ e = 3$	$a = {}^{18}/_{3} = 6$

II.

Die Proportionen.

1.

Von den arithmetischen Proportionen.

Besteht die Proportion aus drei Gliedern, so heißt sie
eine stetige (I.),
aus vier Gliedern, eine getrennte Proportion (II.).

Bezeichnet man bei einer stetigen Proportion
durch a das erste Glied,
— b das zweite Glied,
— c das dritte Glied,
und bei einer getrennten Proportion
durch a das erste Glied,
— b das zweite Glied,
— c das dritte Glied,
— d das vierte Glied;

so ergiebt sich bei einer stetigen, wenn zwei dieser Größen gegeben sind, der Werth der dritten, und bei einer getrennten, wenn drei dieser Größen gegeben sind, der Werth der vierten aus folgender Tabelle:

Hauptformel.

I) $a—b—c$ oder $a—b = b—c$.

II) $a—b = c—d$

Eigenschaften.

I.

1) $a—b = b—c$.

2) $c—b = b—a$.

3) $b—c = a—b$.

4) $b—a = c—b$.

II.

1) $a—b = c—d$.

2) $c - d = a - b$.
3) $d - c = b - a$.
4) $b - a = d - c$.
5) $a - c = b - d$.
6) $b - d = a - c$.
7) $d - b = c - a$.
8) $c - a = d - b$.

	Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
I.	1	a, b	c	$c = 2b - a$
	2	b, c	a	$a = 2b - c$
	3	a, c	b	$b = \frac{a+c}{2}$
II.	1	a, b, c	d	$d = (b+c) - a$
	2	a, b, d	c	$c = (a+d) - b$
	3	a, c, d	b	$b = (a+d) - c$
	4	b, c, d	a	$a = (b+c) - d$

Beispiele.

	Nro.	Gegeben.	Rechnung.
I.	1	$a = 5$, $b = 4$	$c = (2 \times 4) - 5 = 3$
	2	$b = 6$, $c = 5$	$a = (2 \times 6) - 5 = 7$
	3	$a = 9$, $c = 3$	$b = \frac{9+3}{2} = 6$
II.	1	$a = 6$, $b = 2$, $c = 3$	$d = (5 + 3) - 6 = 2$
	2	$a = 5$, $b = 2$, $d = 9$	$c = (5 + 9) - 2 = 12$
	3	$a = 8$, $c = 12$, $d = 7$	$b = (8 + 7) - 12 = 3$
	4	$b = 6$, $c = 10$, $d = 7$	$a = (6 + 10) - 7 = 9$

2.

Von den geometrischen Proportionen.

Besteht die Proportion aus drei Gliedern, so nennt man sie eine stetige (I.),

aus vier Gliedern eine getrennte Proportion (II.).

Bezeichnet man bei einer stetigen Proportion

durch a das erste Glied,

— b das zweite Glied,

— c das dritte Glied,

und bei einer getrennten Proportion

durch a das erste Glied,

— b das zweite Glied,

— c das dritte Glied,

— d das vierte Glied;

so ergiebt sich bei einer stetigen, wenn zwei dieser Größen gegeben sind, der Werth der dritten, und bei einer getrennten, wenn drei dieser Größen gegeben sind, der Werth der vierten aus folgender Tabelle:

Hauptformel.

I) $a : b : c$ oder $a : b = b : c$.

II) $a : b = c : d$.

Eigenschaften.

I.

1) $a : b = b : c$.

2) $c : b = b : a$.

3) $b : c = a : b$.

4) $b : a = c : b$.

II.

1) $a : b = c : d$.

2) $c : d = a : b$.

3) $d : c = b : a$.

4) b : a = a : c.
5) a : c = b : d.
6) b : d = a : c.
7) d : b = c : a.
8) c : a = d : b.

	Nro.	Gegeben.	Gesucht.	Formeln.
I.	1	a, b	c	$c = \frac{bb}{a}$
	2	b, c	a	$a = \frac{bb}{c}$
	3	a, c	b	$b = \sqrt{ac}$
II.	1	a, b, c	d	$d = \frac{bc}{a}$
	2	a, b, d	c	$c = \frac{ad}{b}$
	3	a, c, d	b	$b = \frac{ad}{c}$
	4	b, c, d	a	$a = \frac{bc}{d}$

Beispiele.

	Nro.	Gegeben.	Rechnung.
I.	1	a = 9, b = 12	$c = \frac{12\times12}{9} = 16$
	2	b = 12, c = 8	$a = \frac{12\times12}{8} = 18$
	3	a = 4, c = 9	$b = \sqrt{4\times9} = 6$
II.	1	a=2, b=3, c=4	$d = \frac{3\times4}{2} = 6$
	2	a=4, b=3, d=6	$c = \frac{4\times6}{3} = 8$
	3	a=4, c=12, d=9	$b = \frac{4\times9}{12} = 3$
	4	b=3, c=10, d=6	$a = \frac{3\times10}{6} = 5$

Anhang.

Anwendung der Lehre von den geometrischen Proportionen auf verschiedene Rechnungsarten.

Einleitung.

A.

Von den geometrischen Verhältnissen.

a.

Folgende Verhältnisse sind durch die kleinsten Zahlen auszudrücken:

1) 3 : 6 1 : 2	2) 5 : 35 1 : 7	3) 13 : 52 1 : 4
4) 12 : 18 2 : 3	5) 70 : 126 5 : 9	6) 420 : 735 4 : 7
7) 105 : 84 5 : 4	8) 78 : 169 6 : 13	

b.

Nachstehende Verhältnisse sind durch die kleinsten ganzen Zahlen darzustellen:

1) $\frac{1}{3} : \frac{4}{3}$ 1 : 4	2) $\frac{2}{3} : 5\frac{1}{3}$ 1 : 8	3) $11\frac{2}{5} : \frac{4}{5}$ 57 : 4
4) $2\frac{2}{15} : 3\frac{4}{5}$ 32 : 57	5) 3,24 : 7,54 162 : 377	6) 2,4 : 7,84 15 : 49

B.

Von den geometrischen Proportionen.

a.

Die Versetzungen und Veränderungen der Glieder einer Proportion.

durch Alternation:

1) $2 : 6 = 7 : 21$
$2 : 7 = 6 : 21$

durch Inversion:

2) $3 : 9 = 7 : 21$
9) $9 : 3 = 21 : 7$

durch Addition:

3) $6 : 8 = 21 : 28$
$14 : 8 = 49 : 28$

4) $5 : 6 = 15 : 18$
$11 : 5 = 33 : 15$

durch Subtraktion:

5) $3 : 5 = 12 : 20$
$2 : 5 = 8 : 20$

6) $2 : 7 = 6 : 21$
$5 : 2 = 15 : 6$

durch Multiplikation:

7) $\frac{1}{3} : \frac{2}{3} = 5 : 10$
$2 : 4 = 5 : 10$

8) $3/8 : 6 = 19 : 30$
$3/8 : 6 = 76 : 120$

9) $2 : 7 = 30 : 105$
$6 : 21 = 90 : 315$

10) $2\frac{1}{2} : 3 = 6\frac{2}{3} : 8$
$30 : 3 = 80 : 8$

11) $6 : \frac{9}{14} = 1\frac{1}{3} : \frac{1}{7}$
$6 : 4\frac{1}{2} = 1\frac{1}{3} : 1$

durch Division:

12) $4 : 2 = 6 : 3,$
$2 : 1 = 6 : 3$

13) $4 : 9 = 5 : 11\frac{1}{4}$
$4 : 9 = 1 : 2\frac{1}{4}$

14) $\frac{7}{5} : \frac{7}{3} = \frac{21}{5} : 7$
$3 : 5 = 9 : 15$

15) $16\frac{5}{9} : 12 = 37\frac{1}{4} : 27$
$4 : 12 = 9 : 27$

16) $2 : 41\frac{1}{3} = 3 : 62$
$2 : 8 = 3 : 12$

durch Erhebung zu Potenzen.

17) $2 : 4 = 3 : 6$
$4 : 16 = 9 : 36$

18) $2 : 3 = 4 : 6$
$8 : 27 = 64 : 216$

durch Ausziehung der Wurzel.

19) $1 : 9 = 25 : 225$
$1 : 3 = 5 : 15$

20) $1 : 8 = 27 : 216$
$1 : 2 = 3 : 6$

b.

Verbindung mehrerer Proportionen zu einer.

1)
$$\begin{array}{l}3 : 9 = 4 : 12\\ 7 : 35 = 11 : 55\\ \hline 21 : 315 = 44 : 660\end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l}13 : 6 = 7 : 3\frac{3}{13}\\ 5 : 3\frac{3}{13} = 13 : 8\frac{2}{5}\\ \hline 5 : 6 = 7 : 8\frac{2}{5}\end{array}$$

3)
$$\begin{array}{l}2 : 5 = 7 : 17\frac{1}{2}\\ 2 : 5 = 5 : 12\frac{1}{2}\\ \hline 7 : 17\frac{1}{2} = 5 : 12\frac{1}{2}\end{array}$$

4)
$$\begin{array}{l}2 : 3 = 6 : 9\\ 2 : 3 = 8 : 12\\ \hline 2 : 3 = 14 : 21\end{array}$$

5)
$$\begin{array}{l}3 : 12 = 5 : 20\\ 4 : 12 = 5 : 15\\ \hline 4 : 3 = 20 : 15\end{array}$$

6)
$$\begin{array}{l}2 : 4 = 3 : 6\\ 2 : 4 = 4 : 8\\ 2 : 4 = 5 : 10\\ \hline 3 : 6 = 4 : 8\\ 1 : 4 = 5 : 10\\ \hline 6 : 24 = 20 : 80\end{array}$$

7) $3\frac{2}{3} : 7 = 11 : 21$
$3\frac{2}{3} : 7 = 22 : 42$
$3\frac{2}{3} : 7 = 33 : 63$
$3\frac{2}{3} : 7 = 66 : 126$

8) $4 : 3 = 12 : 9$
$6 : 3 = 12 : 6$
$9 : 3 = 12 : 4$
$6 : 4 = 9 : 6$
$9 : 3 = 12 : 4$
$6 : 3 = 12 : 6$

Aufgaben zur Anwendung der geometrischen Proportionen.

A. Dreisatz-Rechnung.

a. Gerade Dreisatz-Rechnung.

1) 3 ℔ kosten 5 fl; was kosten 8 ℔?

$$3 : 8 = 5 : x$$

$$x = \frac{8 \times 5}{3} = 13\frac{1}{3} \text{ fl} = 13 \text{ fl } 5 \text{ bz.}$$

2) Für 4 L. kauft man 7 ℔; wie viel erhält man für 9 L.?

$$4 : 7 = 9 : x$$

$$x = \frac{7 \times 9}{4} = 15\frac{3}{4} \text{ ℔} = 15 \text{ ℔ } 24 \text{ Loth.}$$

3) 3 ℔ 24 Lth. kosten 4 ƒ; was kosten 2 ℔ 8 Lth.?

3 ℔ 24 Lth. : 2 ℔ 8 Lth. = 4 L. : x

120 : 72 = 4 : x

5 : 3 = 4 : x

$$x = \frac{3 \times 4}{5} = 2 \text{ L. } 8 \text{ s.}$$

4) Für 4 ƒ 22 bz. kauft man 10 ℔; wie viel erhält man für 6 ƒ 9 bz.?

4 ƒ 12 bz. : 6 ƒ 9 bz. = 10 : x

72 : 99 = 10 : x

8 : 11 = 10 : x

$$x = \frac{11 \times 10}{8} = 13 \text{ ℔ } 24 \text{ Lth.}$$

5) 48 Ellen Tuch kosten 64 L. 16 s. 8 d.; was kosten 36 Ellen?

48 : 36 = 64 L. 16 s. 8 d. : x

4 : 3 = 64 — 16 — 8 — : x

$$x = \frac{4\ (64 \text{ L. } 46 \text{ s. } 8 \text{ d.})}{3} = 48 \text{ L. } 12 \text{ s. } 6 \text{ d.}$$

6) Für 24 Thlr. kauft man 30 ℔ 20 Lth. Waare; wie viel erhält man für 16 Thlr.?

24 : 16 = 30 ℔ 20 Loth. : x

3 : 2 = 30 — 20 — : x

$$x = \frac{2\ (30 \text{ ℔ } 20 \text{ Lth.})}{3} = 20 \text{ ℔ } 13 \text{ Lth. } 1\tfrac{1}{3} \text{ Qt.}$$

7) Was kosten 6 Lth. 2 Qt. Gewürz, wenn 3 Ctr. 72 ℔ mit 975 ƒ 12 bz. 2 kr. bezahlt wird?

3 Ctr. 72 ℔ : 6 Lth. 2 Qt. = 975 ƒ 12 bz. 1 kr. : x

47616 Qt. : 26 Qt. = 975 ƒ 12 bz. 2 kr. : x

$$x = \frac{26\ (975 \text{ ƒ } 12 \text{ bz. } 2 \text{ kr.})}{47616} = 7 \text{ bz. } 3\tfrac{11551}{11904} \text{ kr.}$$

8) Für 16 Thlr. 9 gr. 6 pf. kauft man 60 ℔ 24 Lth. 2 Qt. Waare; wie viel für 40 Thlr. 15 gr.?

15 Thlr. 9 gr. 6 pf. : 40 Thlr. 15 gr. = 60 ℔ 24 Lth. 2 Qt. : x
4722 pf. : 11700 pf. = 60 ℔ 24 Lth. 2 Qt : x

$$x = \frac{11700 \ (60 \text{ ℔ } 24 \text{ Lth. } 2 \text{ Qt.})}{4722} = 1 \text{ Ctr. } 50 \text{ ℔}$$

$18\,{}^{9}/_{787}$ Qt.

b. Verkehrte Dreisatz-Rechnung.

9) 40 Schanzgräber können eine Schanze in 12 Tagen vollenden; wenn sie aber in 5 Tagen fertig seyn soll, wie viel Schanzgräber müssen angestellt werden?

$$5 : 12 = 40 : x$$

$$x = \frac{12 \times 40}{5} = 96 \text{ Schanzgräber.}$$

10) Wenn 6 Schnitter eine Wiese in 8 Tagen abmähen, in wie viel Tagen werden 4 Schnitter damit fertig werden?

$$4 : 6 = 8 : x$$

$$x = \frac{6 \times 8}{4} = 12 \text{ Tage.}$$

11) Zu einer Kleidung bedarf man 12 Ellen Tuch von $^{7}/_{4}$ Breite; wie viel braucht man, wenn die Breite nur $^{5}/_{4}$ ist?

$$^{5}/_{4} : {}^{7}/_{4} = 12 : x$$

$$5 : 7 = 12 : x$$

$$x = \frac{7 \times 12}{5} = 16\,{}^{4}/_{5} \text{ Ellen.}$$

12) Wie viel rheinl. Fuß betragen 2400 par. Fuß, wenn der rheinl. Fuß 139 par. Linien enthält?

$$139 : 2400 = 144 : x$$

$$x = \frac{2400 \times 144}{139} = 2486{,}33 \ldots \text{ rheinl. Fuß.}$$

B. Vielsatz-Rechnung.

13) Wenn 20 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, einen Garten in 6 Tagen umgraben; in wie viel Tagen würden ihn 30 Arbeiter umgraben, die täglich 8 Stunden daran arbeiten?

$$\begin{array}{rcl} 30 : 20 &=& 12 : x \\ 8 : 10 &=& x : x' \\ \hline 240 : 200 &=& 12 : x' \\ 6 : 5 &=& 12 : x' \end{array}$$

$$x' = \frac{5 \times 12}{6} = 10 \text{ Tage.}$$

14) Ein Mauermeister hat mit seinen Gesellen in 18 Tagen eine Mauer aufgebaut, die 100 Fuß lang, 6 Fuß breit und 30 Fuß hoch ist; nun soll er mit eben dieser Mannschaft eine andere Mauer aufbauen, die 120 Fuß lang, 5 Fuß breit und 40 Fuß hoch werden soll; wie viel Tage wird er damit zubringen?

$$\begin{array}{rcl} 100 : 120 &=& 18 : x \\ 6 : 5 &=& x : x' \\ 30 : 40 &=& x' : x'' \\ \hline 18000 : 24000 &=& 18 : x'' \\ 3 : 4 &=& 18 : x'' \end{array}$$

$$x'' = \frac{4 \times 18}{3} = 24 \text{ Tage.}$$

15) Wenn 36 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, einen Weg, der 540 Ruthen lang und 18 Fuß breit ist, in 20 Tagen beendigen; wie viel Tage werden 40 Ar-

beiter, die täglich 12 Stunden arbeiten, zu einem Wege brauchen, der 810 Ruthen lang und 24 Fuß breit ist?

$$\begin{array}{rrcl} 40: & 36 & = & 20 : x \\ 12: & 10 & = & x : x' \\ 540: & 810 & = & x' : x'' \\ 18: & 24 & = & x'' : x''' \\ \hline 4665600: & 6998400 & = & 20 : x''' \\ 2: & 3 & = & 20 : x \end{array}$$

$$x = \frac{3 \times 20}{2} = 30 \text{ Tage.}$$

16) Wenn 30 Arbeiter, die täglich 12 Stunden arbeiten, einen Graben, der 720 Ruthen lang, 16 Fuß breit und 6 Fuß tief ist, in 10 Tagen machen; wie viel Tage werden 24 Arbeiter, die täglich 10 Stunden arbeiten, zu einem Graben brauchen, der 640 Ruthen lang, 18 Fuß breit und 8 Fuß tief ist?

$$\begin{array}{rrcl} 24: & 30 & = & 10 : x \\ 10: & 12 & = & x : x' \\ 720: & 640 & = & x' : x'' \\ 16: & 18 & = & x'' : x''' \\ 6: & 8 & = & x''' : x'''' \\ \hline 16588800: & 33177600 & = & 10 : x'''' \\ 1: & 2 & = & 10 : x'''' \end{array}$$

$$x'''' = \frac{2 \times 10}{1} = 20 \text{ Tage}$$

17) Durch 10 Weber, die wöchentlich 5 Tage und täglich 12 Stunden gearbeitet haben, sind in 15 Wochen 90 Gewebe, jedes 30 Ellen lang und $5/4$ Ellen breit, verfertigt worden. In wie viel Wochen werden 20 Weber 81 Gewebe, deren jedes 40 Ellen lang und $3/4$ Elle breit sein soll, weben, wenn sie wöchentlich 6 Tage und täglich 9 Stunden arbeiten?

$$\begin{array}{rcrcl} 20 & : & 10 & = & 15 : x \\ 6 & : & 5 & = & x : x' \\ 9 & : & 12 & = & x' : x'' \\ 90 & : & 81 & = & x'' : x''' \\ 30 & : & 40 & = & x''' : x'''' \\ 5/4 & : & 3/4 & = & x'''' : x''''' \\ \hline 3645000 & : & 1458000 & = & 15 : x''''' \\ 5 & : & 2 & = & 15 : x''''' \end{array}$$

$$x''''' = \frac{2 \times 15}{5} = 6 \text{ Wochen.}$$

C. Gesellschafts-Rechnung.

a. Einfache Gesellschafts-Rechnung.

18) Die Kontribution, welche drei Dörfer A, B, C zusammen zu leisten haben, beträgt jährlich 600 Thlr. Wie viel muß hierzu jedes Dorf entrichten, wenn der zu leistende Betrag derselben von der Zahl der Hufen abhängt, und A 250, B 300 und C 350 Hufen hat?

A = 250 Hufen
B = 300 Hufen
C = 350 Hufen

900 Hufen.

Der Theilungsfaktor ist $^{600}/_{9000} = ^{2}/_{3}$

A. $^{2}/_{3} \times 250 = 166$ Thlr. 16 gr.
B. $^{2}/_{3} \times 300 = 100$ — 0 —
C. $^{2}/_{3} \times 350 = 233$ — 8 —

600 Thlr.

19) Fünf Kaufleute gewinnen mit ihrer gesammten Einlage 7500 fl; was erhält jeder vom Gewinne, wenn A 300, B 400, C 500, D 600, und E 700 fl zur Einlage getragen haben?

A	300 fl
B	400 —
C	500 —
D	600 —
E	700 —
	2500 fl

Der Theilungsfaktor ist $^{7500}/_{2500} = 3$

A	3×300	=	900 fl
B	3×400	=	1200 —
C	3×500	=	1500 —
D	3×600	=	1800 —
E	3×700	=	2100 —
			7500 fl

20) In einem Geschäfte, das vier Personen gemeinschaftlich betrieben, gewannen dieselben mit ihrer gesammten Einlage von 2700 L. so viel, daß vom Gewinne auf A 866 L. 13 s. 4 d., auf B 1000 L., auf C 666 L. 13 s. 4 d. und auf D 1066 L. 13 s. 4 d. kamen, was gab jeder zur Einlage?

A	866 L.	13 s.	4 d.
B	1000 —	0 —	0 —
C	665 —	13 —	4 —
D	1066 —	13 —	4 —
	3600 L.		

Der Theilungsfaktor ist $^{2700}/_{3600} = \frac{3}{4}$

A $\frac{3}{4} \times 866\,L.\,13\,s.\,4\,d. = \frac{3 \times (866\,L.\,13\,s.\,4\,d.)}{4} = 650\,L.$

B $\frac{3}{4} \times 1000 = \frac{13 \times 1000}{4} = 750\,L.$

C $\frac{3}{4} \times 666$ L. 13 s. 4 d. $= \frac{3 \times (666 \text{ L. } 13 \text{ s. } 4 \text{ d.})}{4} = 500$ L.

D $\frac{3}{4} \times 1066$ L. 13 s. 4 d. $= \frac{3 \times (1066 \text{ L. } 13 \text{ s. } 4 \text{ d.})}{4} = 800$ L.

A	650	L.
B	750	—
C	500	—
D	800	—
	2700	L.

22) Das Schießpulver besteht aus 15 Theilen Salpeter, 2 Theilen Schwefel und 3 Theilen Kohlen; wie viel ist von jeder Ingredienz zu nehmen, wenn 15 ℔ Pulver gemischt werden sollen?

Salpeter	15
Schwefel	2
Kohlen	3
	20

Der Theilungsfaktor ist $\frac{15}{20} = \frac{3}{4}$

Salpeter	$\frac{3}{4} \times 15$ =	11 ℔	8 Lth.
Schwefel	$\frac{3}{4} \times 2$ =	1 —	16 —
Kohlen	$\frac{3}{4} \times 3$ =	2 —	8 —
		15 ℔	

b. Zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung.

22) An einer Arbeit, die mit 300 Thlr. bezahlt wird, arbeiten 24 Mann 15 Tage, 15 Mann 18 Tage und 9 Mann 29 Tage; was erhält jede Abtheilung an Arbeitslohn?

24 Mann	in	15 Tagen	= 360	Tage	für	1	Mann.
15	—	— 18	— = 270	—	—	1	—
9	—	— 20	— = 180	—	—	1	—
			810				

Der Theilungsfaktor ist $\frac{300}{810} = \frac{10}{27}$

Die 1ste Abthlg. $\frac{10}{27} \times 360 = 133\frac{1}{3}$ Thlr.
Die 2te — $\frac{10}{27} \times 270 = 100$ —
Die 4te — $\frac{10}{27} \times 180 = 66\frac{2}{3}$ —

300 Thlr.

23) Drei Fleischer miethen gemeinschaftlich eine Wiese für 50 L.; A weidete darauf 300 Schafe 18 Wochen, B 250 Schafe 20 Wochen und C 180 Schafe 25 Wochen; wie viel hat jeder zur Pacht beizutragen?

A 300 Schafe in 18 Wochen = 5400 Schafe in 1 Woche.
B 250 — — 20 — = 5000 — — 1 —
C 180 — — 25 — = 4500 — — 1 —

14900 Schaafe.

Der Theilungsfaktor ist $\frac{50}{14900} = \frac{1}{298}$
A $\frac{1}{298} \times 5400 = 18\frac{18}{149}$ L.
B $\frac{1}{298} \times 5000 = 16\frac{116}{149}$ —
C $\frac{1}{298} \times 4500 = 15\frac{15}{149}$ —

50 L.

24) A hat 90 Ctr. 35 Meilen, B 80 Ctr. 40 Meilen und C 60 Ctr. 50 Meilen weit zu fahren; was wird jeder an Frachtgeld zu bezahlen haben, wenn der Fuhrmann für die gesammte Ladung 100 ℊ verlangt?

A 90 Ctr. für 35 Meilen = 3150 Ctr. für 1 Meile.
B 80 — — 40 — = 3200 — — 1 —
C 60 — — 50 — = 3000 — — 1 —

9350 Ctr.

Der Theilungsfaktor ist $\frac{100}{9350} = \frac{2}{187}$

A $\frac{2}{187} \times 3150 = 33\frac{129}{187}$ ℊ
B $\frac{2}{187} \times 3200 = 34\frac{42}{187}$ —
C $\frac{2}{187} \times 3000 = 32\frac{16}{187}$ —

100 ℊ

D. Vermischungs-Rechnung.

a. Einfache Vermischungs-Rechnung.

25) Ein Silberarbeiter muß aus 15löthigem und 10löthigem Silber 8 Mark 12löthiges mischen; wie viel nimmt er von jeder Sorte zur Mischung?

$$12 \left| \begin{array}{c|c} 10 & 3 \\ 15 & 2 \\ \hline & 5 \end{array} \right\} \text{Verhältnißzahlen.}$$

$\frac{3}{5} \times 8 = 4\frac{4}{5}$ Mark 10löthiges Silber.
$\frac{2}{5} \times 8 = 3\frac{1}{5}$ — 15 — —

b. Zusammengesetzte Vermischungs-Rechnung.

36) In welchem Verhältnisse ist aus 22, 18 und 15 karatigem Golde 20karatiges zu mischen?

$$20 \begin{Bmatrix} 22 \\ 18 \\ 15 \end{Bmatrix} \begin{array}{l|c} 2+5 & 7 \\ 2 & 2 \\ \quad\;\; 2 & 2 \end{array} \Bigg\} \text{Verhältnißzahlen.}$$

27) In welchem Verhältnisse ist aus 22, 21, 18 und 16 karatigem Golde 20karatiges zu mischen?

$$20 \begin{Bmatrix} 22 \\ 21 \\ 18 \\ 16 \end{Bmatrix} \begin{array}{cc|c} 2 & & 2 \\ & 4 & 4 \\ 2 & & 2 \\ & 1 & 1 \end{array} \Bigg\} \text{Verhältnißzahlen.}$$

oder

$$20 \begin{Bmatrix} 22 \\ 21 \\ 18 \\ 16 \end{Bmatrix} \begin{array}{cc|c} 4 & & 4 \\ & 2 & 2 \\ & 1 & 1 \\ 2 & & 2 \end{array} \Bigg\} \text{Verhältnißzahlen.}$$

Vierter Abschnitt.

Von den Progressionen.

I.

Die arithmetischen Progressionen.

1.

Entwickelung der Formeln.

Bezeichnet man

durch a das erste Glied,
— z das letzte Glied,
— d die Differenz,
— n die Zahl der Glieder und
— s die Summe der Reihe;

so hat man:

I.	II.	III.	IV.	V.	. . . . .	N.
a,	a+d,	a+2d,	a+3d,	a+4d,	. . .	a+(n—1)d.

---

1. $z = a+(n-1)d$

17. $a = z-(n-1)d$ (1)

9. $d = \frac{z-a}{n-1}$ (1)

13. $n = \frac{z-a}{d} + 1$ (1)

$$\begin{array}{llllll} s = & a, & a+d, & a+2d, & \ldots & a+(n-1)d \\ s = & a+(n-1)d, & a+(n-2)d, & a+(n-3)d & \ldots & a \\ \hline 2s = & 2a+(n-1)d, & 2a+(n-1)d, & 2a+(n-)d & \ldots & 2a+(n-1)d \end{array}$$

$$2s = n\,[2a+(n-1)d]$$

5) $$s = \frac{n\,[2a+(n-1)\,d]}{2} = \frac{n[a+a+(n-1)d]}{2}$$

7) $$= \frac{n\,(a+z)}{2}\,(1)$$

---

10) $$d = \frac{2s-2an}{n\,(n-1)}\ (5)$$

$$dn(n-1) = 2\ s-2an$$

$$dn^2-dn = 2s-2an$$

$$n^2-n = \frac{2s-2an}{d}$$

$$n^2+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)n+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2 = \frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2$$

$$\sqrt{\left[n^2+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)n+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2 = \frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$$

$$n+\left(\frac{2a-d}{2d}\right) = \sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$$

14) $$n = \frac{d-2a}{2d}\pm\sqrt{\left[\frac{2s}{d}+\left(\frac{2a-d}{2d}\right)^2\right]}$$

18) $$a = \frac{s}{n}-\frac{(n-1)\,d}{2}\ (5)$$

7) $$s = \frac{n(a+z)}{2}\ (5)$$

15) $$n = \frac{2\ s}{a+z}\ (5)$$

20) $a = \frac{2s}{n} - z$ (5)

3) $z = \frac{2s}{n} - a$ (5)

$\frac{2s}{a+z} = 1 + \frac{z-a}{d}$ (15 und 13)

$2sd = z^2 - a^2 + ad + dz$

$z^2 + dz = 2sd + a^2 - ad$

$\sqrt{}\, z^2 + dz + \frac{1}{4} d^2 = 2ds + a^2 - ad + \frac{1}{4} d^2 \times a^2 - ad + \frac{1}{4} d^2$

$z + \frac{1}{2} d = \sqrt{[2ds + (a - \frac{1}{2} d)^2]}$

2) $z = -\frac{1}{2} d \pm \sqrt{[2ds + (a - \frac{1}{2} d)^2]}$

$\frac{2s}{a+z} = 1 + \frac{z-a}{d}$ (15 u. 13)

$2s = a + z + \frac{(z+a)(z-a)}{d}$

6) $s = \frac{a+z}{2} + \frac{(z+a)(z-a)}{2d} = \frac{a+z}{2} + \frac{z^2 - a^2}{2d}$

$\frac{2s}{a+z} = 1 + \frac{z-a}{d}$ (15 u. 13)

$2ds = z^2 - a^2 + ad + dz$

$2ds - ad - dz = z^2 - a^2$

$d(2s - a - z) = z^2 - a^3$

11) $d = \frac{z^2 - a^2}{2s - a - z} = \frac{(z+a)(z-a)}{2s - a - z}$

$\frac{2s}{a+z} = 1 + \frac{z-a}{d}$ (15 u. 13)

$da + dz + z^2 + a^2 = 2ds$

$a^2 - da = z^2 + dz - 2ds$

$\sqrt{}\, a^2 - da + \frac{1}{4} d^2 = z^2 + dz + \frac{1}{4} d^2 - 2ds \times z^2 + dz + \frac{1}{4} d^2$

$a - \frac{1}{2} d = \sqrt{[(z + \frac{1}{2} d)^2 + 2ds]}$

19) $a = \frac{1}{2} d \pm \sqrt{[(z+\frac{1}{2}d)^2 + 2ds]}$

$$\frac{2s}{n} - z = z - (n-1)d \text{ (20 u. 17)}$$

$$\frac{2s}{n} + (n-1)d = 2z$$

4) $\frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2} = z$

$$\frac{2s}{n} - z = z - (n-1)d \text{ (20 u. 17)}$$

$$\frac{2s}{n} = 2z - (n-1)d$$

8) $s = \frac{n[2z-(n-1)d]}{2}$

$$\frac{2s}{n} - z = z - (n-1)d \text{ (20 u. 17)}$$

$$(n-1)d = 2z - \frac{2s}{n}$$

12) $d = \frac{2nz - 2s}{n(n-1)}$

$$\frac{2s}{n} - z = z - (n-1)d \text{ (20 u. 17)}$$

$$(n-1)d = 2z - \frac{2s}{n}$$

$$(n-1)dn = 2nz - 2s$$

$$n^2 - n = \frac{2nz}{d} - \frac{2s}{d}$$

$$n^2 - \left(\frac{2z+d}{2d}\right)n + \left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 = \left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}$$

$$\sqrt{\left[n^2 - \left(\frac{2z+d}{2d}\right)n + \left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 = \left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$$

$$n - \frac{2z+d}{2d} = \sqrt{\left[\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$$

16) $$n = \frac{2z+d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2z+d}{2d}\right)^2 - \frac{2s}{d}\right]}$$

2.

Zusammenstellung der Formeln.

Tabelle.

Nro.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
1	a, d, n	z	$= a+(n-1)d$
2	a, d, s	z	$= -\frac{1}{2}d \pm \sqrt{[2ds+(a-\frac{1}{2}d)^2]}$
3	a, n, s	z	$= \frac{2s}{n} - a$
4	d, n, s	z	$= \frac{s}{n} + \frac{(n-1)d}{2}$
5	a, d, n	s	$= \frac{n\,[2a+(n-1)d]}{2}$
6	a, d, z	s	$= \frac{a+z}{2} + \frac{(z+a)\,(z-a)}{2d}$
7	a, n, z	s	$= \frac{n(a+z)}{2}$
8	d, n, z	s	$= \frac{n[2z-(n-1)d]}{2}$

Fortsetzung.

	Gegeben			Gesucht	
9	a,	n,	z	d	$= \frac{z - a}{n - 1}$
10	a,	n,	s		$= \frac{2s - 2an}{n(n-1)}$
11	a,	z,	s		$= \frac{(z+a)(z-a)}{2s - z - a}$
12	n,	z,	s		$= \frac{2nz - 2s}{n(n-1)}$
13	a,	d,	z	n	$= 1 + \frac{z - a}{d}$
14	a,	d,	s		$= \frac{d - 2a}{2d} \pm \sqrt{\left[\frac{2s}{d} + \left(\frac{2a - d}{2d}\right)^2\right]}$
15	a,	z,	s		$= \frac{2s}{a + z}$
16	d,	z,	s		$= \frac{2z + d}{2d} \pm \sqrt{\left[\left(\frac{2z + d}{2d}\right) - \frac{2s}{d}\right]}$
17	d,	n,	z	a	$= z - (n-1)d$
18	d,	n,	s		$= \frac{s}{n} - \frac{(n-1)d}{2}$
19	d,	z,	s		$= \frac{1}{2}d \pm \sqrt{[(z + \frac{1}{2}d)^2 - 2ds]}$
20	n,	z,	s		$= \frac{2s}{n} - z$

3.
Anwendung der Formeln.
Beispiele.

Nro.	Gegeben.	Gesucht	Berechnung.
1	$a = 1,\ d = 2,\ n = 14$	z	$= 1 + (14 - 1)\ 1 = 14$
2	$a = 2,\ d = 3,\ s = 442$	z	$= -\frac{1}{2} \times 3 \pm \sqrt{[2 \times 3 \times 442 + (2 - \frac{1}{2} \times 3)^2]} = +50$ od. -53.
3	$a = 7,\ n = 16,\ s = 142$	z	$= \frac{2 \times 142}{16} - 7 = 10\frac{3}{4}$
4	$d = \frac{1}{3},\ n = 100,\ s = 900$	z	$= \frac{1900}{100} + \frac{(100 - 1)\ \frac{1}{3}}{2} = 35\frac{1}{2}$
5	$a = 1,\ d = 1,\ n = 14$	s	$= \frac{14[2 \times 1 + (14 - 1) 1]}{2} = 105$
6	$a = \frac{5}{7},\ d = 1\frac{2}{3},\ z = 20\frac{5}{7}$	s	$= \frac{(20\frac{5}{7} - \frac{5}{7})(20\frac{5}{7} + \frac{5}{7})}{2 \times 1\frac{2}{3}} + \frac{\frac{5}{7} + 20\frac{5}{7}}{2} = 139\frac{2}{7}$
7	$a = -7,\ n = 8,\ z = 14$	s	$= \frac{8(-7 \times 14)}{2} = 28$
8	$d = \frac{3}{4},\ n = 30,\ z = 15\frac{3}{4}$	s	$= 30[2 \times 15\frac{3}{4} - (30 - 1)\frac{3}{4}] = 146\frac{1}{4}$
9	$a = -7,\ n = 8,\ z = 14$	d	$= \frac{14 + 7}{8 - 1} = 3$
10	$a = 7,\ n = 16,\ s = 142$	d	$= \frac{2 \times 142 - 2 \times 7 \times 16}{16(16 - 1)} = \frac{1}{4}$
11	$a = 0,\ z = 5,\ s = 27\frac{1}{2}$	d	$= \frac{(5 + 0)\ (5 - 0)}{2 \times 27\frac{1}{2} - 5 - 0} = \frac{1}{2}$
12	$n = 6,\ z = -20,\ s = -90$	d	$= \frac{(2 \times 6 \times -20) - (2 \times -90)}{6\ (6 - 1)} = -2$

Fortsetzung.

13	$a=\frac{5}{7},\ d=1\frac{2}{3},\ z=20\frac{5}{7}$	n	$=1+\frac{20\frac{5}{7}-\frac{5}{7}}{1\frac{2}{3}}=13$
14	$a=2,\ d=3,\ s=442$		$=\frac{2-2\times2}{2\times3}\pm\sqrt{\left[\frac{2\times442}{3}+\left(\frac{2\times2-3}{2\times3}\right)^2\right]}=+17$ oder $-17\frac{1}{3}$
15	$a=0,\ z=5,\ s=27\frac{1}{2}$		$=\frac{2\times27\frac{1}{2}}{0+5}=11$
16	$d=\frac{1}{8}\ z=3\frac{7}{8},\ s=60\frac{1}{8}$		$=\frac{2\times3\frac{7}{8}+\frac{1}{8}}{2\times\frac{1}{8}}\pm\sqrt{\left[\left(\frac{2\times3\frac{7}{8}+\frac{1}{8}}{2\times\frac{1}{8}}\right)^2-\frac{2\times60\frac{1}{8}}{\frac{1}{8}}\right]}=+26$ oder $+37$
17	$d=\frac{3}{4},\ n=30,\ z=z15\frac{3}{4}$	a	$=15\frac{3}{4}-(30-1)\frac{3}{4}=-6$
18	$d=\frac{1}{3},\ n=100,\ s=1900$		$=\frac{1900}{100}-\frac{(100-1)\frac{1}{3}}{2}=2\frac{1}{2}$
19	$d=\frac{1}{8},\ z=3\frac{7}{8},\ s=60\frac{1}{8}$		$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\pm\sqrt{\left[\left(3\frac{7}{8}+\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)^2-2\times\frac{1}{8}\times60\frac{1}{8}\right]}=+\frac{3}{4}$ oder $-\frac{5}{8}$
20	$n=6,\ z=-20,\ s=-90$		$=\frac{2\times-90}{6}+20=-10$

II.

Die geometrischen Progressionen.

1.

Entwickelung der Formeln.

Bezeichnet man:
durch a das erste Glied,
— b das letzte Glied,
— e den Exponenten,
— n die Zahl der Glieder und
— s die Summe der Reihe;
so hat man:

I.	II.	III.	IV.	. . . .	N.
a,	ae	ae^2,	ae^3,	. . . .	ae^{n-1}

$$s = a + ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots ae^{n-1}$$
$$e\ s = ae + ae^2 + ae^3 + \ldots\ldots\ldots\ldots ae^n$$

$$(e-1)\,s = ae^n - a$$

$$s = \frac{ae^n - a}{e-1} = \frac{a(e^n-1)}{e-1} = \frac{ez-a}{e-1}$$

$$1)\quad z = ae^{n-1}$$

$$5)\quad s = \frac{a(e^n-1)}{e-1}$$

$$6)\quad s = \frac{ez-a}{e-1}$$

$$\frac{ez-a}{e-1} = s\ (6)$$

$$ez = a+(e-1)s$$

2) $$z = \frac{a+(e-1)s}{e}$$

$$\frac{ez-a}{e-1} = s\ (6)$$

$$ez-a = es-s$$

$$(z-s)\ e = a-s$$

15) $$e = \frac{a-s}{z-s} = \frac{s-a}{s-z}$$

$$ae^{n-1} = z\ (1)$$

$$e^{n-1} = \frac{z}{a}$$

13) $$e = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$$

$$\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{s-a}{s-z}\ (13\ u.\ 15)$$

$$\frac{z}{a} = \frac{(s-a)^{n-1}}{(s-z)^{n-1}}$$

3) $$z(s-z)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$$

$$ae^{n-1} = z\ (1)$$

9) $$a = \frac{z}{e^{n-1}}$$

$$s = \frac{ez-a}{e-1}\ (6)$$

$$(e-1)\ s = ez-a$$

11) $$a = ez-(e-1)s$$

$$\frac{z}{e^{n-1}} = ez-(e-1)s\ (9\ u.\ 11)$$

$$z = z\ e^{n}-(e-1)s\,e^{n-1}$$

$$(e-1)s\,e^{n-1} = z\,e^{n}-z$$

$$(e-1)\,s\,e^{n-1} = (e^{n}-1)z$$

4) $$\frac{(e-1)\, s\, e^{n-1}}{e^n-1} = z$$

$$\frac{s-a}{s-z} = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} \quad (15 \text{ u. } 13)$$

$$s-a = s\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$$

$$z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - a = \left(\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1\right)s$$

$$s = \frac{\left(z\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}\right) - a}{\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1}$$

$$s = \frac{\sqrt[n-1]{\frac{z^n}{a}} - a}{\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} - 1}$$

$$s = \frac{\frac{z^{\frac{n}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - a}{\frac{z^{\frac{1}{n-1}}}{a^{\frac{1}{n-1}}} - 1}$$

7) $$s = \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}.$$

$$\frac{z}{e^{n-1}} = ez - (e-1)\, s \; (9 \text{ u. } 11)$$

$$(e-1)\, s = e\, z - \frac{z}{e^{n-1}}$$

$$s = \frac{e\,z - \frac{z}{e^{n-1}}}{e-1}$$

8) $$s = \frac{z(e^n-1)}{(e-1)e^{n-1}}$$

$$\frac{a(e^n-1)}{e-1} = s\ (5)$$

$$a(e^n-1) = (e-1)\ s$$

10) $$a = \frac{(e-1)s}{e^n-1}$$

$$\frac{s-a}{s-z} = \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}\ (15\ \text{u.}\ 13)$$

$$\frac{(s-a)^{n-1}}{(s-z)^{n-1}} - \frac{z}{a} = 0$$

12) $$a(s-a)^{n-1} - z(s-z)^{n-1} = 0$$

$$\frac{a(e^n-1)}{e-1} = s\ (5)$$

$$a(e^n-1) = e\,s - s$$

$$e^n - 1 = \frac{e\,s}{a} - \frac{s}{a}$$

$$e^n - \frac{s}{a}e + \frac{s}{a} - 1 = 0$$

14) $$e^n - \frac{s}{a}e + \frac{s-a}{a} = 0$$

$$\frac{z}{e^{n-1}} = e\,z - (e-1)s\ (9\ \text{und}\ 11)$$

$$z = z\,e^n - e^n s + e^{n-1}s$$

$$(s-z)e^n = s\,e^{n-1} - z$$

$$e^n = \frac{s}{s-z}e^{n-1} - \frac{z}{s-z}$$

16) $e^n - \frac{s}{s-z} e^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$

$a e^{n-1} = z \ (1)$

$(n-1) \log. e + \log. a = \log. z$

$(n-1) \log. e = \log. z - \log. a$

$n-1 = \frac{\log. z - \log. a}{\log. e}$

17) $n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. e} + 1$

$\frac{a(e^n-1)}{e-1} = s \ (5)$

$a(e^n-1) = (e-1)s$

$e^n-1 = \frac{(e-1)s}{a}$

$e^n = \frac{(e-1)s+a}{a}$

$n \log. e = \log. [a+(e-1)s] - \log. a$

18) $n = \frac{\log. [a+(e-1)s] - \log. a}{\log. e}$

$\sqrt[n-1]{\frac{z}{a}} = \frac{s-a}{s-z}$ (13 u. 15)

$\frac{\log. z - \log. a}{n-1} = \log. (s-a) - \log. (s-z)$

$\log. z - \log. a = [\log. (s-a) - \log. (s-z)] n-1$

$n-1 = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-z)}$

19) $n = \frac{\log. z - \log. a}{\log. (s-a) - \log. (s-z)} + 1$

$\frac{z}{e^{n-1}} = ez - (e-1)s$ (9 und 11)

$\log. z - (n-1) \log. e = \log. [e z - (n-1)s]$

$(n-1) \log. e = \log. z - \log. [ez - (e-1)s]$

$$n-1 = \frac{\log. z - \log.[ez-(e-1)s]}{\log. e}$$

$$20) \quad = \frac{\log. z - \log.[ez-(e-1)s]}{\log. e} + 1$$

2.

Zusammenstellung der Formeln.

Tabelle.

Nro.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
1	a, e, n	z	$= ae^{n-1}$
2	a, e, s	z	$= \frac{a+(e-1)s}{e}$
3	a, n, s	z	$z(s-z)^{n-1} - a(s-a)^{n-1} = 0$
4	e, n, s	z	$= \frac{(e-1)se^{n-1}}{e^n-1}$
5	a, e, n	s	$= \frac{a(e^n-1)}{e-1}$
6	a, e, z	s	$= \frac{ez-a}{e-1}$
7	a, n, z	s	$= \frac{z^{\frac{n}{n-1}} - a^{\frac{n}{n-1}}}{z^{\frac{1}{n-1}} - a^{\frac{1}{n-1}}}$
8	e, n, z	s	$= \frac{z(e^n-1)}{(e-1)e^{n-1}}$

Nro.	Gegeben.	Gesucht	Formeln.
9	e, n, z	a	$= \frac{z}{e^{n-1}}$
10	e, n, s	a	$= \frac{(e-1)s}{e^n-1}$
11	n, z, s	a	$= ez-(e-1)s$
12	n, z, s	a	$a(s-a)^{n-1}-z(s-z)^{n-1} = 0$
13	a, n, z,	e	$= \sqrt[n-1]{\frac{z}{a}}$
14	a, n, s	e	$e^n - \frac{s}{a}e + \frac{s-a}{a} = 0$
15	a, z, s	e	$= \frac{s-a}{s-z}$
16	n, z, s	e	$e^n - \frac{s}{s-z}e^{n-1} + \frac{z}{s-z} = 0$
17	a, e, z	n	$= \frac{\log.z - \log.a}{\log.e} + 1$
18	a, e, s	n	$= \frac{\log.[a+(e-1)s] - \log.a}{\log.e}$
19	a, z, s	n	$= \frac{\log.z - \log.a}{\log.(s-a) - \log.(s-z)} + 1$
20	e, z, s	n	$= \frac{\log.z - \log.[ez-(e-1)s]}{\log.e} + 1$

3.
Anwendung der Formeln.
Beispiele.

Nro.	Gegeben.	Gesucht	Berechnung.
1	$a = 1$, $e = 2$, $n = 7$	z	$= 1 \times 2^{7-1} = 64$
2	$a = 4$, $e = 3$, $s = 118096$	z	$= \frac{4 + (3-1)118096}{3} = 78732$
4	$e = 4$, $n = 9$, $s = 436905$	z	$= \frac{(4-1)436905 \times 4^{9-1}}{4^9 - 1} = 327689$
5	$a = 1$, $e = 2$, $n = 7$	s	$= \frac{1(2^7 - 1)}{2-1} = 127$
6	$a = 2$, $e = 3$, $z = 486$	s	$= \frac{3 \times 486 - 2}{3-1} = 728$
7	$a = 3$, $n = 8$, $z = 384$	s	$= \frac{384^{8/8-1} - 2^{8/8-1}}{384^{1/8-1} - 3^{1/8-1}} = 765$
8	$e = 2$, $n = 6$, $z = 128$	s	$= \frac{128(2^6 - 1)}{(2-1)2^{6-1}} = 252$
9	$e = 2$, $n = 8$, $z = 384$	a	$= \frac{384}{2^{8-1}} = 3$
10	$e = 4$, $n = 8$, $s = 43690$	a	$= \frac{(4-1)43690}{4^8 - 1} = 2$
11	$e = 3$, $z = 2187$, $s = 3280$	a	$= 3 \times 2187 - (3-1)3280 = 1$

Nro.	Gegeben.	Gesucht	Berechnung.
13	$a = 2$ $n = 6$ $z = 486$	e	$= \sqrt[6-1]{\frac{486}{2}} = 3$
15	$a = 1$ $z = 2187$ $s = 3280$	e	$= \frac{3280-1}{3280-2187} = 3$
17	$a = 4$ $e = 2$ $z = 128$	n	$= \frac{\log. 128 - \log. 4}{\log. 2} + 1 = 6$
18	$a = 5$ $e = 4$ $s = 436905$	n	$= \frac{\log. [5 + (4-1) 436905 - \log. 5}{\log. 4} = 9$
19	$a = 2$ $z = 32768$ $s = 43690$	n	$= \frac{\log. 32768 - \log. 2}{\log.(43690-2) - \log.(43690-32768)}$ $+1 = 8$
20	$e = 3$ $z = 78732$ $s = 118096$	n	$= \frac{\log. 78732 - \log. [3 \times 78732 - (3-1) 118096]}{\log. 3}$ $+1 = 10.$

III.

Die figurirten Zahlen.

1.

Von den Linienzahlen.

Setzt man in einer arithmetischen Reihe das erste Glied = 1, so erhält man die Reihe der ersten Ordnung (Linienzahlen).

Formeln.

Wenn $d = 1$, so ist $z = n$
— $d = 2$, – – $z = 2n-1$
— $d = 3$, – – $z = 3n-2$
— $d = 4$, – – $z = 4n-3$
— $d = 5$, – – $z = 5n-4$
— $d = 6$, – – $z = 6n-5$
— $d = 7$, – – $z = 7n-6$
— $d = 8$, – – $z = 8n-7$
— $d = 9$, – – $z = 9n-8$
— $d = 10$, – – $z = 10n-9$
. . . .
— $d = d$, – – $z = d\ n-d+1$

Beispiele.

Linienzahlen.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI. u. s. w.
Diff. = 1	1	2	3	4	5	6
— = 2	1	3	5	7	9	11
— = 3	1	4	7	10	13	16
— = 4	1	5	9	13	17	21
— = 5	1	6	11	16	21	26
— = 6	1	7	13	19	25	31
— = 7	1	8	15	22	29	36
— = 8	1	9	17	25	33	41
. . .	. .	. .	. .	. .	. .	. .
— = d	1,	1+d,	1+2d,	1+3d,	1+4d,	1+5d

2.

Von den Polygonalzahlen.

Summirt man die Linienzahlen, so erhält man die Reihe der zweiten Ordnung (Flächenzahlen).

Formeln.

Wenn $d = 1$, so ist $s = \frac{n(n+1)}{2}$

— $d = 2$, - - $s = n^2$

— $d = 3$, - - $s = \frac{n(3n-1)}{2}$

— $d = 4$, - - $s = n(2n-1)$

— $d = 5$, - - $s = \frac{n(5n-3)}{2}$

— $d = 6$, - - $s = n(3n-2)$

— $d = 7$, - - $s = \frac{n(7n-5)}{2}$

— $d = 8$, - - $s = n(4n-3)$

— $d = 9$, - - $s = \frac{n(9n-7)}{2}$

— $d = 10$, - - $s = n(5n-4)$

. . . .

— $d = d$, - - $s = \frac{n(dn-d+2)}{2}$

Beispiele.

Polygonalzahlen.		I.	II.	III.	IV.	V.	VI. u. s. w.
III Eck	=	1	3	6	10	15	21
IV —	=	1	4	9	16	25	36
V —	=	1	5	12	22	35	51
VI —	=	1	6	15	28	45	66
VII —	=	1	7	18	34	55	81
VIII —	=	1	8	21	40	65	96

IXEck	=	1	9	24	46	75	111
X—	=	1	10	27	52	85	126
. . . . .		. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
m—	=	1,	2+d,	3+3d,	4+6d,	5+10d,	6+10d.

3.

Von den Pyramidalzahlen.

Summirt man die Polygonalzahlen, so erhält man die Reihe der dritten Ordnung (Körperzahlen).

Formeln.

Wenn d = 1, so ist d. Sme. d. Plgzhln. $= \frac{(n+1)(n+2)}{6}$

— d = 2, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

— d = 3, - - - - - - - - $= \frac{n^2(n+1)}{2}$

— d = 4, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(4n-1)}{6}$

— d = 5, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(5n-2)}{6}$

— d = 6, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(2n-1)}{2}$

— d = 7, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(7n-4)}{6}$

— d = 8, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(8n-5)}{6}$

— d = 9, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(3n-2)}{2}$

— d = 10, - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(10n-7)}{6}$

. . . .

— d = d, - - - - - - - - $= \frac{n(n+1)(dn-d+3)}{6}$

Beispiele.

Pyramidalzahlen.	I.	II.	III.	IV.	V.	VI. u. s. w.
IIIeckige Pyr. =	1	4	10	20	35	56
IV — — =	1	5	14	30	55	91
V — — =	1	6	18	40	75	126
VI — — =	1	7	22	50	95	161
VII — — =	1	8	26	60	115	196
VIII — — =	1	9	30	70	135	231
IX — — =	1	10	34	80	155	266
X — — =	1	11	38	90	175	301

. . . .

m — — = 1, 3+d, 6+4d, 10+10d, 15+20d, 21+35d.

Fünfter Abschnitt.

Von den Permutationen, Combinationen und Variationen.

I.

Die Permutationen.

1.

Permutationen mit Wiederholungen.

Formel.

Die Anzahl der Permutationen mit Wiederholungen für gleiche Elemente $l+m+n+ \ldots\ldots = N$ ist:

$$\frac{1\times2\times3\times4\times5\times \ldots\ldots\ldots\ldots (N-1)N}{(1\times2\times3\times\ldots l)(1\times2\times3\times\ldots m)(1\times2\times3\times\ldots n)\times\ldots}$$

Beispiele.

1) $a, a, b = \frac{1\times2\times3}{1\times2} = 3$

2) $a, a, b, b = \frac{1\times2\times3\times4}{1\times2\times1\times2} = 6$

3) $a, a, a, b, b = \frac{1\times2\times3\times4\times5}{1\times2\times3\times1\times2} = 10$

4) $a, a, a, b, b, c = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times3\times1\times2\times1} = 60$

5) $a, a, b, b, c, c = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6}{1\times2\times1\times2\times1\times2} = 90$

6) $a,a,a,a,b,b,b,c,c,d = \frac{1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10}{1\times2\times3\times4\times1\times2\times3\times1\times2\times1}$
$= 12600.$

Darstellung der Elemente.

1) Permutat. (a, a, b) =

aab
aba
baa

2) Permutat. (a, a, b, b) =

aabb
abab
abba
baab
baba
bbaa

3) Permutat. (a, a, a, b, b) =

aaabb
aabab
aabba
abaab
ababa
abbaa
baaab
baaba
babaa
bbaaa

2.

Permutationen ohne Wiederholungen.

Formel.

Die Anzahl der Versetzungen von N verschiedenen Elementen ist:

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; (N-1)\, N.$$

Beispiele.

1) $a = 1$
2) $a, b = 1 \times 2 = 2$
3) $a, b, c = 1 \times 2 \times 3 = 6$
4) $a, b, c, d = 1 \times 2 \times 3 \times 4 = 24$
5) $a, b, c, d, e = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$
6) $a, b, c, d, e, f = 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 = 720$

Darstellung der Elemente.

2) Permutat. (a, b) =

ab
ba

3) Permutat. (a, b, c) =

abc
acb
bac
bca
cab
cba

4) Permutat. (a, b, c, d) =

abcd	cabd
abdc	eadb
acbd	cbad
acdb	cbda
adbc	cdab
adcb	cdba
bacd	dabc
badc	dacb
bcad	dbac
bcda	dbca
bdac	dcab
bdca	dcba

II.

Die Combinationen.

1.

Combinationen mit Wiederholungen.

Formel.

Die Anzahl der Combinationen mit Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1. Classe $= n$

— — 2. — $= \frac{n(n+1)}{1 \times 2}$

— — 3. — $= \frac{n(n+1)(n+2)}{1 \times 2 \times 3}$

— — 4. — $= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

. . . .

— — mte Classe $= \frac{n(n+1)(n+2) \ldots\ldots (n+m-1)}{1 \times 2 \times 3 \times \ldots\ldots\ldots m}$

Beispiele.

2te Classe.

1) a, b, c $= \frac{3(3+1)}{1 \times 2} = 6$

2) a, b, c, d $= \frac{4(4+1)}{1 \times 2} = 10$

3) a, b, c, d, e $= \frac{5(5+1)}{1 \times 2} = 15$

3te Classe.

4) a, b, c $= \frac{3(3+1)(3+2)}{1 \times 2 \times 3} = 10$

5) a, b, c, d $= \frac{4(4+1)(4+2)}{1 \times 2 \times 3} = 20$

6) a, b, c, d, e $= \frac{5(5+1)(5+2)}{1\times2\times3} = 35$

4te Classe.

7) a, b, c $= \frac{3(3+1)(3+2)(3+3)}{1\times2\times3\times4} = 15$

8) a, b, c, d $= \frac{4(4+1)(4+2)(4+3)}{1\times2\times3\times4} = 35$

9) a, b, c, d, e $= \frac{5(5+1)(5+2)(5+3)}{1\times2\times3\times4} = 70$

Darstellung der Elemente.

2te Classe.

1) Combinat. (a, b, c) =

aa	bb
ab	bc
ac	cc

2) Combinat. (a, b, c, d) =

aa	bc
ab	bd
ac	cc
ad	cd
bb	dd

3) Combinat. (a, b, c, d, e) =

aa	bb	cd
ab	bc	ce
ac	bd	dd
ad	be	de
ae	cc	ee

3te Classe.

4) Combinat. (a, b, c) =

aaa	abc	bcc
aab	acc	ccc
aac	bbb	
abb	bbc	

5) Combinat. (a, b, c, d) =

aaa	acc	bcd
aab	acd	bdd
aac	add	ccc
aad	bbb	ccd
abb	bbc	cdd
abc	bbd	ddd
abd	bcc	

4te Classe.

7) Combinat. (a, b, c) =

aaaa	aacc	bbbb
aaab	abbb	bbbc
aaac	abbc	bbcc
aabb	abcc	bccc
aabc	accc	cccc

2.

Combinationen ohne Wiederholungen.

Formel.

Die Anzahl der Combinationen ohne Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1ste Classe $= n$

— — 2te — $= \frac{n(n-1)}{1 \times 2}$

für die 3te Classe $= \frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$

— — 4te — $= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$

. . . .

— — mte Classe $= \frac{n(n-1)(n-2) \;.\;.\;.\; (n-m+1)}{1 \times 2 \times 3 \times \;.\;.\;.\;.\;.\; m}$

Beispiele.

2te Classe.

1) a, b, c, d $= \frac{4(4-1)}{1 \times 2} = 6$

2) a, b, c, d, e $= \frac{5(5-1)}{1 \times 2} = 10$

3te Classe.

3) a, b, c, d, e $= \frac{5(5-1)(5-2)}{1 \times 2 \times 3} = 10$

4) a, b, c, d, e, f $= \frac{6(6-1)(6-2)}{1 \times 2 \times 3} = 20$

4te Classe.

5) a, b, c, d, e, f $= \frac{6(6-1)(6-2)(6-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 15$

6) a, b, c, d, e, f, g $= \frac{7(7-1)(7-2)(7-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} = 35$

Darstellung der Elemente.

2te Classe.

1) Combinat. (a, b, c, d) =

ab	bc
ac	bd
ad	cd

3te Classe.

3) Combinat. (a, b, c, d, e) =

abc	ade
abd	bcd
abe	bce
acd	bde
ace	cde

4te Classe.

5) Combinat. (a, b, c, d, e, f) =

abcd	acef
abce	adef
abcf	bcde
abde	bcdf
abdf	bcef
abef	bdef
acde	cdef
acdf	

III.

Die Variationen.

1.

Variationen mit Wiederholungen.

Formel.

Die Anzahl der Variationen mit Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1ste Classe = n
— — 2te — = n^2
— — 3te — = n^3
— — 4te — = n^4
. . . .
— — mte Classe = n^m

Beispiele.

2te Classe.

1) a, b, c, d, e = 5^2 = 25

3te Classe.

2) a, b, c, d, = 4^3 = 64

4te Classe.

3) a, b, c, = 3^4 = 81

Darstellung der Elemente.

2te Classe.

1) Variat. (a, b, c, d, e) =

aa	bc	cd	de
ab	bd	ce	ea
ac	be	da	eb
ad	ca	db	ec
ae	cb	dc	ed
ba	cc	dd	ee
bb			

3te Classe.

4) Variat. (a, b, c,) =

aaa	baa	caa
aab	bab	cab
aac	bac	cac
aba	bba	cba
abb	bbb	cbb
abc	bbc	cbc
aca	bca	cca
acb	bcb	ccb
acc	bcc	ccc

2.

Variationen ohne Wiederholungen.

Formel.

Die Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen für n Elemente ist:

für die 1ste Classe $= n$
— — 2te — $= n\,(n-1)$
— — 3te — $= n\,(n-1)\,(n-2)$
— — 4te — $= n\,(n-1)(n-2)\,(n-3)$
. . . .
— — mte Classe $= n\,(n-1)(n-2)\ .\ .\ .\ (n-m+1)$

Beispiele.

2te Classe.

1) a, b, c $= 3(3-1) = 6$
2) a, b, c, d $= 4(4-1) = 12$

3te Classe.

3) a, b, c, d, e $= 5(5-1)(5-2) = 60.$

2te Classe.

Darstellung der Elemente.

2) Variat. (a, b, c, d) =

ab	ca
ac	cb
ad	cd
ba	eb
bc	da
bd	dc

Sechster Abschnitt.

Von den Potenzen.

Bezeichnung.

$a^0 = 1$

$a^{-1} = \frac{1}{a}$

$a^{-2} = \frac{1}{a^2}$

$a^{-3} = \frac{1}{a^3}$

$a^{-4} = \frac{1}{a^4}$

. . . . .

$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$

I.

Addition und Subtraktion.

1.

Addition und Subtraktion einfacher Größen.

1) $ax^n+bx^n+cx^n+dx^n = (a+b+c+d)x^n$

2) $ax^n+bx^n-cx^n-dx^n = (a+b-c-d)x^n$

3) $10a^4+3a^4+6a^4-a^4-5a^4 = 19a^4-6a^4 = 13a^4$

4) $6^4+2\times8^3+3^2-19\times6^4+5\times8^3 = 7\times8^3-18\times6^4+3^2$

5) $\frac{5a^3}{b^4} - \frac{7a^3}{b^4} + \frac{11a^3}{b^4} = \frac{9a^3}{b^4}$

Addition und Subtraktion zusammengesetzter Größen.

6)
$$\begin{array}{r} 5a^4b+3a^{-2}b^2c-\ 7ab \\ -6a^4b+3a^{-2}b^2c+17ab \\ 9a^4b-8a^{-2}b^2c-10ab \\ \hline 8a^4b-2a^{-2}b^2c \end{array}$$

7)
$$\begin{array}{r} 5a^m b^n + 3a^{-3}b^2 - c^3d^2 \\ -3a^m b^n + 3a^{-3}b^2 - 4c^3d^2 \\ a^m b^n + 2a^{-3}b^2 - 2c^3d^2 \\ \hline 3a^m b^n + 8a^{-3}b^2 - 7c^3d^2 \end{array}$$

8)
$$\begin{array}{r} 5a^4 - 7a^3b^2 - 3c^{-1}d^2 + 7e \\ 3a^4 - 15a^3b^2 - 7c^{-1}d^2 - 3e \\ - \quad + \qquad + \qquad + \\ \hline 2a^4 + 8a^3b^2 + 4c^{-1}d^2 + 10e \end{array}$$

II.

Multiplikation.

1.

Multiplikation einfacher Größen.

1) $a^m \times a^n = a^{m+n}$

2) $a^{-m} \times a^n = a^{-m+n} = a^{n-m}$

3) $a^m \times a^{-n} = a^{m-n}$

4) $a^{-m} \times a^{-n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

5) $5a^4 \times a^7 \times 7a^5 \times 3a^6 = 5 \times 1 \times 7 \times 3a^{4+7+5+6} = 105a^{22}$

6) $11a^{-2} \times 2a^{-5} \times 4a^6 \times 9a^4 = 11 \times 2 \times 4 \times 9a^{-2-5+6+4} = 792a^{-7+10} = 792a^3$

7) $2a^{-3} \times 7a^{-9} \times -3a^6 = -42a^{-12+6} = -42a^{-6} = -\frac{42}{a^6}$

8) $a^{-5}b \times a^{-7}d \times 10a = 10a^{-12+1}bd = 10a^{-11}bd = \frac{10bd}{a^{11}}$

9) $3 \times 7^{-9} \times 7^{-2} \times 4 \times 7^8 = 12 \times 7^{-11+8} = 12 \times 7^{-3} = \frac{12}{7^3} = \frac{12}{343}$

2.

Multiplikation zusammengesetzter Größen.

10)
$$\begin{array}{l} a+b \\ a+b \\ \hline a^2+ab \\ \quad +ab+b^2 \\ \hline a^2+2ab+b^2 \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{l} a-b \\ a-b \\ \hline a^2-ab \\ \quad -ab+b^2 \\ \hline a^2-2ab+b^2 \end{array}$$

2)
$$\begin{array}{l} a+b \\ a-b \\ \hline a^2+ab \\ \quad -ab-b^2 \\ \hline a^2-b^2 \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{l} a^2+ab+b^2 \\ a-b \\ \hline a^3+a^2b+ab^2 \\ \quad -a^2b-ab^2-b^3 \\ \hline a^3-b^3 \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{l} a^2+ab+b^2 \\ a^2-ab+b^2 \\ \hline a^4+a^3b+a^2b^2 \\ \quad -a^3b-a^2b^2-ab^3 \\ \qquad +a^2b^2+ab^3+b^4 \\ \hline a^4+a^2b^2+b^4 \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{l} 2a^4x^2-3b^4x^2 \\ 2a^4x^2+3b^4x^2 \\ \hline 4a^8x^4-6a^4b^4x^4 \\ \qquad +6a^4b^4x^4-9b^8x^4 \\ \hline 4a^8x^4-9b^8x^4 \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{l} a^2+az+z^2 \\ a^2-az+z^2 \\ \hline a^4+a^3z+a^2z^2 \\ \quad -a^3z-a^2z^2-az^3 \\ \qquad +a^2z^2+az^3+z^4 \\ \hline a^4+a^2z^2+z^4 \end{array}$$

17) $a^2+2ab+2b^2$
$a^2-2ab+2b^2$

$a^4+2a^3b+2a^2b^2$
$-2a^3b-4a^2b^2-4ab^3$
$+2a^2b^2+4ab^3+4b^4$

a^4+4b^4

18) $14a^5c^2-6a^2bc^2+c^3$
$14a^5c^2+6a^2bc^2-c^3$

$196a^{10}c^4-84a^7c^4+14a^5b^5$
$+84a^7c^4-36a^4b^2c^4+6a^2bc^5$
$-14a^5c^5\ +6a^2bc^5-c^6$

$196a^{10}c^4-36a^4b^2c^4+12a^2bc^5-c^6$

19) $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3$
$a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$

$a^6+2a^5b+2a^4b^2+a^3b^3$
$-2a^5b-4a^4b^2-4a^3b^3-2a^2b^4$
$+2a^4b^2+4a^3b^3+4a^2b^4+2ab^5$
$-\ a^3b^3-2a^2b^4-2ab^5-b^6$

a^6-b^6

III.

Division.

1.

Division einfacher Größen.

1) $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ 2) $\frac{a^m}{a^{-n}} = a^{m+n}$

3) $\frac{a^{-m}}{a^n} = a^{-m-n} = a^{-(m+n)}$

4) $\frac{a^{-m}}{a^{-n}} = a^{-m+n} = a^{n-m}$

5) $\frac{8a^{10}}{2a^4} = \frac{8}{2} \cdot a^{10-4} = 4a^6$

6) $\frac{\frac{7}{3}a^3}{\frac{2}{5}a^7} = \frac{\frac{7}{3}}{\frac{2}{5}} a^{3-7} = \frac{35}{6} a^{-4} = \frac{35}{6a^4}$

2.
Division zusammengesetzter Größen.

7)

$$\begin{array}{r|l|l} b-x & bc^3-c^3x & c^3 \\ & bc^3-b^3x & \\ \hline & - \quad + & \\ & 0 & \end{array}$$

8)

$$\begin{array}{r|l|l} a-b & a^3+a^2b-ab^2-b^3 & a^2+2ab+b^2 \\ & a^3-a^2b & \\ & - \quad + & \\ \hline & +2a^2b-ab^2 & \\ & +2a^2b-2ab^2 & \\ & - \qquad + & \\ \hline & +ab^2-b^3 & \\ & +ab^2-b^3 & \\ & - \quad + & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

9)

$$\begin{array}{r|l|l} a^2-b^2 & a^4-2a^2b^2+b^4 & a^2-b^2 \\ & a^4-\ a^2b^2 & \\ & - \quad + & \\ \hline & -a^2b^2+b^4 & \\ & -a^2b^2+b^4 & \\ & + \qquad - & \\ \hline & 0 & \end{array}$$

10) $a^2-2z^2 \,\big|\, a^8-16z^8 \,\big|\, a^6+2a^4z^2+4a^2z^4+8z^6$

$$\begin{array}{l}
a^8-2a^6z^2 \\
-\quad + \\
\hline
+2a^6z^2-16z^8 \\
+2a^6z^2-4a^4z^4 \\
-\qquad + \\
\hline
+4a^4z^4-16z^8 \\
+4a^6z^4-8a^2z^6 \\
-\qquad + \\
\hline
+8a^2z^6-16z^8 \\
+8a^2z^6-16z^8 \\
-\qquad + \\
\hline
0
\end{array}$$

11) $-1+an \,\big|\, -1+a^3n^3 \,\big|\, 1+an+a^2n^2$

$$\begin{array}{l}
+1+an \\
-\quad - \\
\hline
-an+a^3n^3 \\
-an+a^2n^2 \\
+\quad - \\
\hline
-a^2n^2+a^3n^3 \\
-a^2n^2+a^3n^3 \\
+\quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

12) $\frac{1}{3}+2z+3z^2 \,\big|\, \frac{1}{3}-6z^2+27z^4 \,\big|\, 1-6z+9z^2$

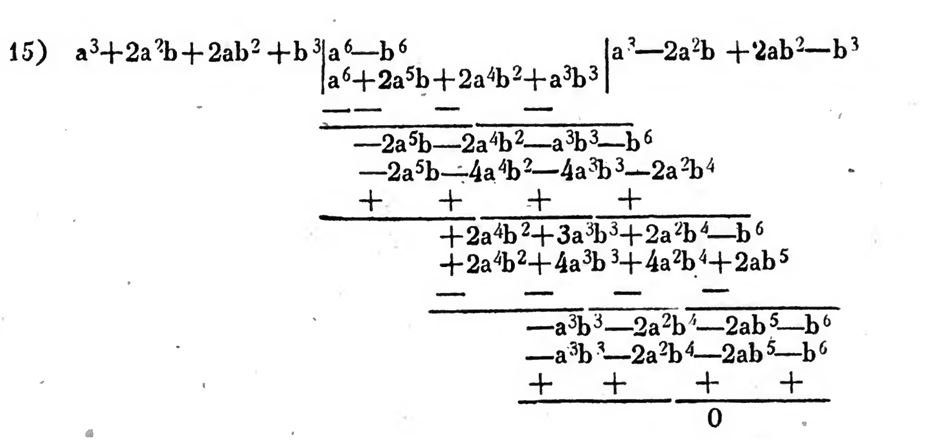
$$\begin{array}{l}
\frac{1}{3}+2z+3z^2 \\
-\quad -\quad - \\
\hline
-2z-9z^2+27z^4 \\
-2z-12z^2-18z^3 \\
+\quad +\quad + \\
\hline
+3z^2+18z^3+27z^4 \\
+3z^2+18z^3+27z^4 \\
-\quad -\quad - \\
\hline
0
\end{array}$$

13) $a^2 - az + z^2 \mid a^6 + 2a^3z^3 + z^6 \mid a^4 + a^3z + az^3 + z^4$

$$
\begin{array}{l}
a^6 - a^5z + a^4z^2 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
+a^5z - a^4z^2 + 2a^3z^3 \\
+a^5z - a^4z^2 + a^3z^3 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
+a^3z^3 + z^6 \\
+a^3z^3 - a^2z^4 + az^5 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
+a^2z^4 - az^5 + z^6 \\
+a^2z^4 - az^5 + z^6 \\
- \quad + \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$

14) $2a + b \mid 32a^5 + b^5 \mid 16a^4 - 8a^3b + 4a^2b^2 - 2ab^3 + b^4$

$$
\begin{array}{l}
32a^5 + 16a^4b \\
- \quad - \\
\hline
-16a^4b + b^5 \\
-16a^4b - 8a^3b^2 \\
+ \quad + \\
\hline
+8a^3b^2 + b^5 \\
+8a^3b^2 + 4a^2b^3 \\
- \quad - \\
\hline
-4a^2b^3 + b^5 \\
-4a^2b^3 - 2ab^4 \\
+ \quad + \\
\hline
+2ab^4 + b^5 \\
+2ab^4 + b^5 \\
- \quad - \\
\hline
0
\end{array}
$$



15) $a^3+2a^2b+2ab^2+b^3 \,|\, a^6-b^6 \,|\, a^3-2a^2b+2ab^2-b^3$

$$
\begin{array}{l}
a^6-b^6 \\
a^6+2a^5b+2a^4b^2+a^3b^3 \\
-\;-\quad-\quad- \\
\hline
-2a^5b-2a^4b^2-a^3b^3-b^6 \\
-2a^5b-4a^4b^2-4a^3b^3-2a^2b^4 \\
+\quad+\quad+\quad+ \\
\hline
+2a^4b^2+3a^3b^3+2a^2b^4-b^6 \\
+2a^4b^2+4a^3b^3+4a^2b^4+2ab^5 \\
-\quad-\quad-\quad- \\
\hline
-a^3b^3-2a^2b^4-2ab^5-b^6 \\
-a^3b^3-2a^2b^4-2ab^5-b^6 \\
+\quad+\quad+\quad+ \\
\hline
0
\end{array}
$$

IV.

Partial-Division.

1) $$a-b \,\Big|\, c \quad \Big|\, \frac{c}{a}+\frac{bc}{a^2}+\frac{b^2c}{a^3}+\frac{b^3c}{a^4}+\ldots$$

$$c-\frac{bc}{a}$$

$$-\;+$$

$$+\frac{bc}{a}$$

$$+\frac{bc}{a}-\frac{b^2c}{a^2}$$

$$-\quad+$$

$$+\frac{b^2c}{a^2}$$

$$+\frac{b^2c}{a^2}-\frac{b^3c}{a^3}$$

$$-\quad+$$

$$+\frac{b^3c}{a^3}$$

$$+\frac{b^3c}{a^3}-\frac{b^4c}{a^4}$$

$$-\quad+$$

$$+\frac{b^4c}{a^4}$$

2) $a+b \,|\, c \,|\, \frac{c}{a} - \frac{bc}{a^2} + \frac{b^2c}{a^3} - \frac{b^3c}{a^4} + \ldots$

$$\begin{array}{l}
c + \frac{bc}{a} \\
- \quad - \\
\hline
\quad - \frac{bc}{a} \\
\quad - \frac{bc}{a} - \frac{b^2c}{a^2} \\
\quad + \quad\; + \\
\hline
\qquad\quad + \frac{b^2c}{a^2} \\
\qquad\quad + \frac{b^2c}{a^2} + \frac{b^3c}{a^3} \\
\qquad\quad - \quad\;\; - \\
\hline
\qquad\qquad\quad \frac{b^3c}{a^3} \\
\qquad\qquad\quad - \frac{b^3c}{a^3} - \frac{b^4c}{a^4} \\
\qquad\qquad\quad + \quad\;\; + \\
\hline
\qquad\qquad\qquad\quad + \frac{b^4c}{a^4}
\end{array}$$

i) $x-1 \,\big|\, a \,\big|\, \frac{a}{x} + \frac{a}{x^2} + \frac{a}{x^3} + \frac{a}{x^4} + \dots$

$$a - \frac{a}{x}$$

$$- \quad +$$

$$+\frac{a}{x}$$

$$+\frac{a}{x} - \frac{a}{x^2}$$

$$- \quad +$$

$$+\frac{a}{x^2}$$

$$+\frac{a}{x^2} - \frac{a}{x^3}$$

$$- \quad +$$

$$+\frac{a}{x^3}$$

$$+\frac{a}{x^3} - \frac{a}{x^4}$$

$$- \quad +$$

$$+\frac{a}{x^4}$$

4) $$x+1 \left| \begin{array}{l} a \\ a+\frac{a}{x} \\ -\;- \\ \hline -\frac{a}{x} \\ -\frac{a}{x}-\frac{a}{x^2} \\ +\quad\;+ \\ \hline +\frac{a}{x^2} \\ +\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3} \\ -\quad\;- \\ \hline -\frac{a}{x^3} \\ -\frac{a}{x^3}-\frac{a}{x^4} \\ +\quad\;+ \\ \hline +\frac{a}{x^4} \end{array} \right| \frac{a}{x}-\frac{a}{x^2}+\frac{a}{x^3}-\frac{a}{x^4}+\dots$$

$$) \; 1-a+a^2 \,\Big|\, 1 \qquad \Big|\, 1+a-a^3-a^4+a^6+a^7-\ldots$$

$$1-a+a^2$$

$$- \; + \; -$$

$$+a-a^2$$

$$+a-a^2+a^3$$

$$- \; + \; -$$

$$-a^3$$

$$-a^3+a^4-a^5$$

$$+ \; - \; +$$

$$-a^4+a^5$$

$$-a^4+a^5-a^6$$

$$+ \; - \; +$$

$$+a^6$$

$$+a^6-a^7+a^8$$

$$- \; + \; -$$

$$+a^7-a^8$$

$$+a^7-a^8+a^9$$

$$- \; + \; -$$

$$-a^9 \, .$$

V.

Potenzen von Potenzen.

1) $(a^m)^n = a^{mn}$

2) $\left(\left((a^m)^n\right)^p\right)^q = a^{mnpq}$

3) $\left((a^m)^{-n}\right)^{-p} = a^{mnp}$

4) $\left((a^{-m})^{-n}\right)^{-p} = a^{-mnp}$

5) $\left((a^{-m})^{n}\right)^{p} = a^{-mnp}$

6) $(a^3b^2)^5 = a^{15}b^{10}$

7) $\left((a^3b^2c)^4\right)^5 = a^{60}b^{40}c^{20}$

8) $(a^3b^{-2}c^{-4})^5 = a^{15}b^{-10}c^{-20}$

9) $(a^{-2}b^{-3}c^4)^{-6} = a^{12}b^{18}c^{-24}$

10) $\left(\frac{a^4}{b^3}\right)^5 = \frac{a^{20}}{b^{15}}$

11) $\left((-a)^3\right)^4 = a^{12}$

12) $\left((-a)^{-3}\right)^{-5} = -a^{15}$

Siebenter Abschnitt.

Von den Wurzeln.

I.

Ausziehung der Wurzeln.

Ziffernzahl der Potenzen.

Bezeichnet man
durch m die Ziffernanzahl der Wurzeln,
— e den Exponenten;
so hat man

für	die	2te	Potenz	von	$2m-1$	bis $2m$
—	—	3te	—	—	$3m-2$	— $3m$
—	—	4te	—	—	$4m-3$	— $4m$
—	—	5te	—	—	$5m-4$	— $5m$
—	—	6te	—	—	$6m-5$	— $6m$
—	—	7te	—	—	$7m-6$	— $7m$
—	—	8te	—	—	$8m-7$	— $8m$
—	—	9te	—	—	$9m-8$	— $9m$
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
—	—	nte	—	—	$em-(e-1)$	bis em

1.

Ausziehung der rationalen Wurzeln.

Formel.

Die 2te Wurzel von $a^2+2ab+b^2 = a+b$
— 3te — — $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a+b$
— 4te — — $a^4+4a^3b+6a^2b^2+4ab^3+b^4 = a+b$
— 5te — — $a^5+5a^4b+10a^3b^2+10a^2b^3+5ab^4+b^5$
$= a+b$

u. s. w.

Anmerkung. Die Quadrat und Kuben eines Binoms kann man auch durch Figuren darstellen, wie Fig. 1. u. 2.

Berechnung.

Zweite Wurzel.

	94	09	(90+7
a^2 =	81	00	= 90^2
	13	09	
2a =	1	80	= 2×90
2ab =	12	60	= 2×90×7
b^2 =		49	= 7^2
	13	09	
		0	

	95	06	25	(900+70+5
900^2 =	81	00	00	
	14	06	25	
2×900 =		18	00	
2×900×70 =	12	60	00	
70^2 =		49	00	
	13	09	00	
		97	25	
3×970 =		19	40	
2×970 ×5 =		97	00	
5^2 =			25	
		97	25	
			0	

		95	12	10	09	(9000+700+50+3
9000^2	=	81	00	00	00	
		14	12	10	09	
2×9000	=		1	80	00	
2×9000×700	=	12	60	00	00	
700^2	=		49	00	00	
		13	09	00	00	
		1	03	10	09	
2×9700	=		1	94	00	
2×9700×50	=		97	00	00	
50^2	=			25	00	
			97	25	00	
			5	85	09	
2×9750	=		1	95	00	
2×9750×3	=		5	85	00	
3^2	=				9	
			5	85	09	
					0	

Dritte Wurzel.

		636	056	(80+6
a^3	=	512	000	$= 80^4$
		124	056	
$3a^2$	=	19	200	$= 3 \times 80^2$
$3a^2b$	=	115	200	$= 3 \times 80^2 \times 6$
$3ab^2$	=	8	640	$= 3 \times 80 \times 6^2$
b^3	=		216	$= 6^3$
		124	056	
			0	

		644	792	544	(800+60+4
800^3	=	512	000	000	
		132	972	544	
3×800^2	=	1	920	000	
$3 \times 800^2 \times 60$	=	115	200	000	
$3 \times 800 \times 60^2$	=	8	640	000	
60^3	=		216	000	
		124	056	000	
		8	916	544	
3×860^2	=	2	218	800	
$3 \times 860^2 \times 4$	=	8	875	200	
$3 \times 860 \times 4^2$	=		41	280	
4^3	=			64	
		8	916	544	
			0		

Vierte Wurzel.

	2839	8241	$(70+3$
$a^4 =$	2401	0000	$= 70^4$
	438	8241	
$4a^3 =$	137	2000	$= 4 \times 70^3$
$4a^3b =$	411	6000	$= 4 \times 70^3 \times 3$
$6a^2b^2 =$	26	4600	$= 6 \times 70^2 \times 3^2$
$4a\,b^3 =$		7560	$= 4 \times 70 \times 3^3$
$b^4 =$		81	$= 3^4$
	438	8241	
		0	

2.

Ausziehung der irrationalen Wurzeln.

A.

Durch Dezimalbrüche.

Formeln.

Die Quadratwurzel von $a^2+2ab+b^2 = a+b$

— Cubikwurzel — $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3 = a+b$

Berechnung.

Quadratwurzel.

6 (2,44948 . . .
4
200
$b(2a+b) = 176$
2400
$b(2a+b) = 1936$
46400
$b(2a+b) = 44001$
239900
$b(2a+b) = 195936$
4396400
$b(2a+b) = 3919104$
477296

8 (2,82842 . . .
4
400
$8(2 \times 20+8) = 384$
1600
$2(2 \times 280+2) = 1124$
47600
$8(2 \times 2820+8) = 45184$
241600
$4(2 \times 28280+4) = 226256$
1534400
$2(2 \times 282840+2) = 1131364$
403036

Cubikwurzel.

3 (1,442...
1
2000

$3a^2b = 1200$
$3ab^2 = 480$
$b^3 = 64$

1744
256000

$3a^2b = 235200$
$3ab^2 = 6720$
$b^3 = 64$

241984
14016000

$3a^2b = 12441600$
$3a\,b^2 = 17280$
$b^3 = 8$

12458888
1557112

4 (1,587....
1
3000

$3\times10^2\times5 = 1500$
$3\times10\times5^2 = 750$
$5^3 = 125$

2375
625000

$3\times150^2\times8=540000$
$3\times150\times8^2= 28800$
$8^3= 512$

569312
55688000

$3\times1580^2\times7=52424400$
$3\times1580\times7^2= 232260$
$7^3= 343$

52657003
3030997

B.

Durch gemeine Brüche.

Formeln.

Bezeichnet man
durch x die Wurzel,
— a die gegebene Zahl und
— n den aproximativen Werth;
so hat man

für die Quadratwurzel $\frac{n^2+a}{2n}$

für die Cubikwurzel $\frac{2n^3+a}{3n^2}$

Berechnung.

Quadratwurzel.

a = 2.

1) $n = 1,\ x = \frac{1^2+2}{2\times 1} = \frac{3}{2}$.

2) $n = \frac{3}{2},\ x = \frac{(\frac{3}{2})^2+2}{2\times\frac{3}{2}} = \frac{17}{12}$

3) $n = \frac{17}{12},\ x = \frac{(\frac{17}{12})^2+2}{2\times\frac{17}{12}} = \frac{577}{408}$

Cubikwurzel.

a = 2.

1) $n = 1,\ x = \frac{2\times 1^3+2}{3\times 1^2} = \frac{4}{3}$

2) $n = \frac{4}{3},\ x = \frac{2\times(\frac{4}{3})^3+2}{3\times(\frac{4}{3})^2} = \frac{91}{72}$

II.

Rechnung mit Wurzelgrößen.

1.

Addition und Subtraktion.

1) $b\sqrt[m]{a}+c\sqrt[m]{a}-d\sqrt[m]{a}=(b+c-d)\sqrt[m]{a}$

2) $3\sqrt[6]{5}+17\sqrt[6]{5}-12\sqrt[6]{5}-7\sqrt[6]{5}=\sqrt[6]{5}$

3) $5\sqrt[7]{9}-2\sqrt[5]{14}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[5]{14}-2\sqrt[7]{9}=3\sqrt[7]{9}-7\sqrt[5]{14}+\sqrt[3]{2}$

4)
$$\begin{array}{r}
10\sqrt{2}+5\sqrt[7]{8}-9\sqrt[3]{5}+2\sqrt[5]{4} \\
5\sqrt{2}+\sqrt[7]{8}+4\sqrt[3]{5}-3\sqrt[5]{4} \\
-3\sqrt{2}-9\sqrt[7]{8}+6\sqrt[3]{5}-\sqrt[5]{4} \\
\hline
12\sqrt{2}-3\sqrt[7]{8}+\sqrt[3]{5}-2\sqrt[5]{4}
\end{array}$$

5)
$$\begin{array}{r}
18\sqrt{7}-5\sqrt[3]{6}+10\sqrt[4]{11}-3\sqrt[5]{13} \\
6\sqrt{7}-2\sqrt[3]{6}+4\sqrt[4]{11}+2\sqrt[5]{13} \\
- \quad\quad + \quad\quad - \quad\quad - \quad\quad \\
\hline
12\sqrt{7}-3\sqrt[3]{6}+6\sqrt[4]{11}-5\sqrt[5]{13}
\end{array}$$

2.

Multiplikation.

1) $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[m]{b}\times\sqrt[m]{c}=\sqrt[m]{abc}$

2) $a\sqrt[n]{x}\times b\sqrt[n]{y}\times c\sqrt[n]{z} = abc\sqrt[n]{xyz}$

3) $5\sqrt{3}\times 7\sqrt{8/3}\times\sqrt{2} = 5\times 7\sqrt{\frac{3\times 8\times 2}{3}} = 35\sqrt{16} =$
$35\times 4 = 140$

4) $c\sqrt{a}\times d\sqrt{a} = cd\sqrt{a^2} = acd$

5) $\sqrt[m]{a}\times\sqrt[n]{b} = \sqrt[mn]{a^n}\times\sqrt[mn]{b^m} = \sqrt[mn]{a^n b^m}$

6) $\sqrt{2}\times\sqrt[3]{3}\times\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{2^6}\times\sqrt[12]{3^4}\times\sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{2^6\times 3^4\times 5^3}$
$= \sqrt[12]{64\times 81\times 125} = \sqrt[12]{648000}$

7) $a\sqrt[m]{x}\times b\sqrt[n]{y}\times c\sqrt[p]{z} = a\sqrt[mnp]{x^{np}}\times b\sqrt[mnp]{y^{mp}}\times c\sqrt[mnp]{z^{mn}} =$
$abc\sqrt[mnp]{x^{np}y^{mp}z^{mn}}$

8)
$$\begin{array}{r} \sqrt{5}+2\sqrt{7}+3\sqrt{10} \\ 2\sqrt{5} \\ \hline 10+4\sqrt{35}+6\sqrt{50} \end{array}$$

9)
$$\begin{array}{r} \sqrt{6}+\sqrt[3]{2}-2\sqrt[4]{5} \\ \sqrt{3} \\ \hline \sqrt{18}+\sqrt[6]{108}-2\sqrt[4]{45} \end{array}$$

10)
$$\begin{array}{r} 3+\sqrt{5} \\ 2-\sqrt{5} \\ \hline 6+2\sqrt{5} \\ -3\sqrt{5}-5 \\ \hline 1-\sqrt{5} \end{array}$$

11)
$$\begin{array}{r} 7+2\sqrt{6} \\ 9-5\sqrt{6} \\ \hline 53+18\sqrt{6} \\ -35\sqrt{6}-60 \\ \hline 3-17\sqrt{6} \end{array}$$

12)
$$\begin{array}{l} 9-7\sqrt{13} \\ 5-6\sqrt{13} \\ \hline 45-35\sqrt{13} \\ \quad -54\sqrt{13}+546 \\ \hline 591-89\sqrt{13} \end{array}$$

13)
$$\begin{array}{l} 6+12\sqrt{7} \\ 3-5\sqrt{7} \\ \hline 18+36\sqrt{7} \\ \quad -30\sqrt{7}-420 \\ \hline 6\sqrt{7}-402 \end{array}$$

14)
$$\begin{array}{l} 9\sqrt{12}+3 \\ 5\sqrt{12}+8 \\ \hline 540+15\sqrt{12} \\ \quad +72\sqrt{12}+24 \\ \hline 564+87\sqrt{12} \end{array}$$

15)
$$\begin{array}{l} 13-\sqrt{5} \\ 7+3\sqrt{5} \\ \hline 91-7\sqrt{5} \\ \quad +39\sqrt{5}-15 \\ \hline 76+32\sqrt{5} \end{array}$$

16)
$$\begin{array}{l} 9+2\sqrt{10} \\ 9-2\sqrt{10} \\ \hline 81+18\sqrt{10} \\ \quad -18\sqrt{10}-40 \\ \hline 41 \end{array}$$

17)
$$\begin{array}{l} \sqrt{2}+\sqrt{3} \\ 2\sqrt{2}-\sqrt{3} \\ \hline 4+2\sqrt{6} \\ \quad -\sqrt{6}-3 \\ \hline 1+\sqrt{6}. \end{array}$$

18)
$$\begin{array}{l} 5\sqrt{14}+3\sqrt{5} \\ 7\sqrt{14}-2\sqrt{5} \\ \hline 490+21\sqrt{70} \\ \quad -10\sqrt{70}-30 \\ \hline 460+11\sqrt{70} \end{array}$$

19
$$\begin{array}{l} \sqrt{7}-\sqrt{3} \\ \sqrt{5}-\sqrt{2} \\ \hline \sqrt{35}-\sqrt{15} \\ \quad -\sqrt{14}+\sqrt{6} \\ \hline \sqrt{35}-\sqrt{15}-\sqrt{14}+\sqrt{6} \end{array}$$

20)
$$\begin{array}{l} 5\sqrt{3}-7\sqrt{6} \\ 2\sqrt{8}-3 \\ \hline 10\sqrt{24}-14\sqrt{48}=20\sqrt{6}-56\sqrt{3} \\ -15\sqrt{3}+21\sqrt{6}=21\sqrt{6}-15\sqrt{3} \\ \hline 41\sqrt{6}-71\sqrt{3} \end{array}$$

21)
$$\begin{array}{l} 2\sqrt{6} - 3\sqrt{5} \\ 4\sqrt{3} - \sqrt{10} \\ \hline 8\sqrt{18} - 12\sqrt{15} = -12\sqrt{15} + 24\sqrt{2} \\ 2\sqrt{60} + 3\sqrt{50} = -4\sqrt{15} + 15\sqrt{2} \\ \hline -16\sqrt{15} + 39\sqrt{2} \end{array}$$

22)
$$\begin{array}{l} \sqrt{12} - 2\sqrt{7} \\ 2 + \sqrt{21} \\ \hline 2\sqrt{12} - 4\sqrt{7} = -4\sqrt{7} + 4\sqrt{3} \\ \sqrt{252} - 2\sqrt{147} = 6\sqrt{7} - 14\sqrt{3} \\ \hline 2\sqrt{7} - 10\sqrt{3} \end{array}$$

3.

Division.

1) $$\frac{\sqrt[m]{a}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

2) $$\frac{c\sqrt[m]{a}}{d\sqrt[m]{b}} = \frac{c}{d}\sqrt[m]{\frac{a}{b}}$$

3) $$\frac{a}{\sqrt[m]{b}} = \frac{\sqrt[m]{a^m}}{\sqrt[m]{b}} = \sqrt[m]{\frac{a^m}{b}}$$

4) $$\frac{a}{\sqrt{a}} = \frac{\sqrt{a^2}}{\sqrt{a}} = \sqrt{a}$$

5) $$\frac{\sqrt[3]{a^2bc}}{\sqrt[5]{ab^2c^3}} = \frac{\sqrt[15]{a^{10}b^5c^5}}{\sqrt[15]{a^3b^6c^9}} = \sqrt[15]{\frac{a^{10}b^5c^5}{a^3b^6c^9}} = \sqrt[15]{\frac{a^7}{bc^4}}$$

6) $$\frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}{\sqrt{\frac{a}{b}}} = \frac{\sqrt[4]{\frac{a}{b}}}{\sqrt[4]{\left(\frac{a}{b}\right)^2}} = \sqrt[4]{\frac{\frac{a}{b}}{\frac{a^2}{b^2}}} = \sqrt[4]{\frac{ab^2}{a^2b}} = \sqrt[4]{\frac{a}{b}}$$

7) $$\frac{c\sqrt{(a^2-x^2)}}{\sqrt{a+x}} = \frac{c\sqrt{(a+x)(a-x)}}{\sqrt{(a+x)}} = c\sqrt{(a-x)}$$

8) $$\frac{\sqrt{(ab^2-b^2c)}}{\sqrt{(a-c)}} = \frac{\sqrt{(a-c)b^2}}{\sqrt{(a-c)}} = \sqrt{b^2} = b$$

9) $$\frac{\sqrt{(a^2-z^2)}}{a-z} = \frac{\sqrt{(a+z)(a-z)}}{a-z} = \frac{\sqrt{(a+z)(a-z)}}{\sqrt{(a-z)(a-z)}}$$
$$= \frac{\sqrt{a+z}}{\sqrt{a-z}} = \sqrt{\frac{a+z}{a-z}}$$

10) $$\frac{\sqrt{72}+\sqrt{32}-4}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{72}}{\sqrt{8}} + \frac{\sqrt{32}}{\sqrt{8}} - \frac{\sqrt{16}}{\sqrt{8}} = \sqrt{9}+$$
$$\sqrt{4}-\sqrt{2} = 5-\sqrt{2}$$

11) $$\frac{1}{\sqrt{3}+2} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}-2)} = \frac{\sqrt{3}-2}{(\sqrt{3})^2-2^2} =$$
$$\frac{\sqrt{3}-2}{3-4} = \frac{\sqrt{3}-2}{-1} = 2-\sqrt{3}$$

12) $$\frac{3}{1+\sqrt{2}} = \frac{3(1-\sqrt{2})}{(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})} = \frac{3-3\sqrt{2}}{1-2=-1}$$
$$= 3\sqrt{2}-3$$

13) $$\frac{12}{5-\sqrt{21}} = \frac{12(5+\sqrt{21})}{(5-\sqrt{21})(5+\sqrt{21})} = \frac{60+12\sqrt{21}}{25-21=4}$$
$$= 15+3\sqrt{21}$$

14) $$\frac{5-7\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}} = \frac{(5-7\sqrt{3})(1-\sqrt{3})}{(1+\sqrt{3})(1-\sqrt{3})} = \frac{16-12\sqrt{3}}{-2}$$
$$= 6\sqrt{3}-13$$

15) $$\frac{\sqrt{3}+\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} = \frac{(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{2})} = \frac{5+2\sqrt{6}}{1}$$
$$= 5+2\sqrt{6}$$

16) $\dfrac{\sqrt{a}}{(b+\sqrt{c})} = \dfrac{(\sqrt{a})\ (b-\sqrt{c})}{(b+\sqrt{c})(b-\sqrt{c})} = \dfrac{b\sqrt{a}-\sqrt{ac}}{b^2-c}$

17) $\dfrac{\sqrt{a}}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})} = \dfrac{(\sqrt{a})(b-\sqrt{c})}{(\sqrt{b}+\sqrt{c})(\sqrt{b}-\sqrt{c})} = \dfrac{\sqrt{ab}-\sqrt{ac}}{b-c}$

18) $\dfrac{156-12\sqrt{11}}{6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11}}$

$$= \frac{(156+12\sqrt{11})(6+14\sqrt{2}+2\sqrt{11})}{(6+14\sqrt{2}-2\sqrt{11})(6+14\sqrt{2}+2\sqrt{11})}$$

$$= \frac{1200+384\sqrt{11}+2184\sqrt{2}+168\sqrt{22}}{384+168\sqrt{2}}$$

$$= \frac{50+16\sqrt{11}+91\sqrt{2}+7\sqrt{22}}{16+7\sqrt{2}}$$

$$= \frac{1106\sqrt{2}+158\sqrt{11}-474}{158} = 7\sqrt{2}+\sqrt{11}-3$$

Achter Abschnitt.

Bezeichnung und Rechnung der Wurzelgrößen durch Bruch-Potenzen.

I.

Bezeichnung.

1) $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$.

2) $\frac{1}{\sqrt[m]{a^n}} = a^{-\frac{n}{m}}$

3) $\sqrt[m]{a^n b^p c^q} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{\frac{q}{m}} = (a^n b^p c^q)^{\frac{1}{m}}$

4) $\sqrt[m]{\frac{a^n b^p}{c^r d^s e^t}} = a^{\frac{n}{m}} b^{\frac{p}{m}} c^{-\frac{r}{m}} d^{-\frac{s}{m}} e^{-\frac{t}{m}}$.

II.

Rechnung mit Bruch-Potenzen.

1.

Multiplikation.

1) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

2) $a^{\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} = a^{\frac{mq-pq}{nq}}$

3) $a^{-\frac{m}{n}} \times a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}} = a^{\frac{np}{nq}-\frac{mq}{nq}} = a^{\frac{np-mq}{nq}}$

4) $a^{-\frac{m}{n}} \times a^{-\frac{p}{q}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\left(\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}\right)} = a^{-\left(\frac{mq+np}{nq}\right)}$

5) $\sqrt[4]{a^3} \times \sqrt[3]{a^5} = a^{3/4} \times a^{5/3} = a^{9/12} \times a^{20/12} = a^{\frac{9+20}{12}} = a^{29/12}$

$a^{2+5/12} = a^2 \times a^{5/12} = a^2 \sqrt[12]{a^5}$

6) $\frac{1}{\sqrt[4]{a^3}} \times \frac{1}{\sqrt[8]{a^7}} = a^{-3/4} \times a^{-7/8} = a^{-6/8} \times a^{-7/8} =$

$a^{-\frac{6+7}{8}} = a^{-13/8} = \frac{1}{a^{13/8}} = \frac{1}{a^{1+5/8}} = \frac{1}{a \times a^{5/8}}$

$= \frac{1}{a \sqrt[8]{a^5}}$

7) $\frac{1}{\sqrt{a}} \times \sqrt[4]{a^7} = a^{-1/2} \times a^{7/4} = a^{-2/4} \times a^{7/4} = a^{\frac{7-2}{4}}$

$= a^{5/4} = a^{1+1/4} = a \times a^{1/4} = a \sqrt[4]{a}$

Division.

1) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}-\frac{np}{nq}} = a^{\frac{mq-np}{nq}}$

2) $\frac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}} = a^{\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}} = a^{\frac{mq+np}{nq}}$

3) $\dfrac{a^{-\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{-\left(\frac{m}{n}+\frac{p}{q}\right)} = a^{-\left(\frac{mq}{nq}+\frac{np}{nq}\right)} = a^{-\left(\frac{mq+np}{nq}\right)}$

4) $\dfrac{a^{-\frac{m}{n}}}{a^{-\frac{p}{q}}} = a^{\frac{p}{q}-\frac{m}{n}} = a^{\frac{np}{nq}-\frac{mq}{nq}} = a^{\frac{np-mq}{nq}}$

5) $\dfrac{c\sqrt[4]{a^3}}{d\sqrt[6]{a^5}} = \dfrac{ca^{3/4}}{da^{5/6}} = \dfrac{ca^{-1/12}}{d} = \dfrac{c}{da^{1/12}} = \dfrac{c}{d\sqrt[12]{a}}$

6) $\dfrac{\sqrt[5]{a^3}\times\sqrt{b}}{\dfrac{1}{\sqrt[5]{a^7}}\times\dfrac{1}{\sqrt[4]{b}}} = \dfrac{a^{3/5}\,b^{1/2}}{a^{-7/5}\,b^{-1/4}} = a^2b^{3/4} = a^2\sqrt[4]{b^3}$

3.

Potenzen von Potenzen.

1) $\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

2) $\sqrt[q]{\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p} = \left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \dfrac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$

3) $\dfrac{1}{\sqrt[q]{(\sqrt[n]{a^m})^p}} = \left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = a^{-\frac{mp}{nq}} = \dfrac{1}{\sqrt[nq]{a^{mp}}}$

4) $\dfrac{1}{\sqrt[q]{\left(\dfrac{1}{\sqrt[n]{a^m}}\right)^p}} = \left(a^{-\frac{m}{n}}\right)^{-\frac{p}{q}} = a^{\frac{mp}{nq}} = \sqrt[nq]{a^{mp}}$

5) $\left(\left(a^{1/2}\right)^{3/4}\right)^{-2/3} = (a^{3/8})^{-2/3} = a^{-6/24} = a^{-1/4}$

$= \dfrac{1}{a^{1/4}} = \dfrac{1}{\sqrt[4]{a}}$

Neunter Abschnitt.

Rechnung mit imaginären Größen.

Bezeichnung.

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a} \times \sqrt{-1}$$

I.

Multiplikation.

1) $3 - \sqrt{-5} = 3 - \sqrt{5} \times \sqrt{-1}$
$4 - 2\sqrt{-5} = 4 - 2\sqrt{5} \times \sqrt{-1}$

$12 - 4\sqrt{5} \times \sqrt{-1}$
$- 6\sqrt{5} \times \sqrt{-1} - 10$

$2 - 10\sqrt{5} \times \sqrt{-1} = 2 - 10\sqrt{-5}$

2) $2 - 5\sqrt{-3} = 2 - 5\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$
$7 - 4\sqrt{-3} = 7 - 4\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$

$14 - 35\sqrt{3} \times \sqrt{-1}$
$- 8\sqrt{3} \times \sqrt{-1} - 60$

$-46 - 43\sqrt{3} \times \sqrt{-1} = -46 - 43\sqrt{-3}$

3) $2\sqrt{3} - \sqrt{-5} = 2\sqrt{3} - \sqrt{5} \times \sqrt{-1}$
$4\sqrt{3} - 2\sqrt{-5} = 4\sqrt{3} - 2\sqrt{5} \times \sqrt{-1}$

$24 - 4\sqrt{15} \times \sqrt{-1}$
$- 4\sqrt{15} \times \sqrt{-1} - 10$

$14 - 8\sqrt{15} \times \sqrt{-1} = 14 - 8\sqrt{-5}$

II.

Division.

1) $\frac{1}{\sqrt{-1}} = \frac{1 \times \sqrt{-1}}{\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}} = \frac{\sqrt{-1}}{-1} = -\sqrt{-1}$

2) $\frac{1}{-\sqrt{-1}} = \frac{1 \times -\sqrt{-1}}{-\sqrt{-1} \times -\sqrt{-1}} = \frac{-\sqrt{-1}}{-1} = \sqrt{-1}$

Zehnter Abschnitt

Reduktionen.

I.

Reduktionen durch Vereinigung der Brüche.

1) $\frac{ab}{c} + d + f = \frac{ab}{c} + \frac{cd}{c} + \frac{cf}{c} = \frac{ab + cd + cf}{c}$

2) $\frac{2am}{a+b} - c = \frac{2am - c(a+b)}{a+b} = \frac{2am - ac - bc}{a+b}$

3) $\frac{a}{bc} + \frac{d}{bf} = \frac{abf + bcd}{bbcf} = \frac{af + cd}{bcf}$

4) $\frac{a}{b+c} + \frac{d}{g+h} = \frac{a(g+h) + d(b+c)}{(b+c)(g+h)}$

5) $\frac{3a}{5b} + \frac{c}{4d} + h = \frac{12ad}{20bd} + \frac{5bc}{20bd} + \frac{20bdh}{20bd} =$
$\frac{12ad + 5bc + 20bdh}{20bd}$

6) $$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}-\frac{e}{f}-\frac{g}{h}-k=\frac{adfh}{bdfh}+\frac{bcfh}{bdfh}-\frac{bdeh}{bdfh}-\frac{bdfg}{bdfh}-\frac{bdfhk}{bdfh}=$$
$$\frac{adfh+bcfh-bdeh-bdfg-bdfhk}{bdfh}$$

7) $$\frac{3a}{4b}+\frac{5f}{8l}-\frac{x}{7y}=\frac{42aly}{56bly}+\frac{35bfy}{56bly}-\frac{8blx}{56bly}=$$
$$\frac{42aly+35bfy-8blx}{56bly}$$

8) $$\frac{af}{4bg}-\frac{5cd}{12bh}+\frac{2}{3}=\frac{3afh}{12bgh}-\frac{5cdg}{12bgh}+\frac{8bgh}{12bgh}$$
$$=\frac{3afh-5cdg+8bgh}{12bgh}$$

9) $$\frac{a}{4bcd}-\frac{h}{2bcg}+\frac{2cd}{5bg}=\frac{5ag}{20bcdg}-\frac{10dh}{20bcdg}$$
$$+\frac{8c^2d^2}{20bcdg}=\frac{5ag-10dh+8c^2d^2}{20bcdg}$$

10) $$\frac{2a}{3bc}+\frac{5df}{8b^2c}-\frac{deg}{6b^2c^2}=\frac{16abc}{24b^2c^2}+\frac{15cdf}{24b^2c^2}$$
$$-\frac{4deg}{24b^2c^2}=\frac{16abc+15cdf-4deg}{24b^2c^2}$$

11) $$a-b-\frac{d}{ef}-\frac{c}{eg}=\frac{efg(a-b)-dg-cf}{efg}$$

12) $$\frac{3ax-4bmx}{2x-3z}+2bm=\frac{3ax-4bmx+2bm(2x-3z)}{2x-3z}=$$
$$\frac{3ax-4bmx+4bmx-6bmz}{2x-3z}=\frac{3ax-6bmz}{2x-3z}$$

13) $\frac{4ghn-2bcm}{3m-4n}+3gh-4bc=$

$\frac{4ghn-2bcm+9mgh-12bcm-12ghn+16bcn}{3m-4n}=$

$\frac{-8ghn-14bcm+9mgh+16bcn}{3m-4n}$

14) $\frac{2a-3b}{6cgh}-\frac{5c-4b}{2ghm}=\frac{m(2a-3b)-3c(5c-4b)}{6cghm}=$

$\frac{2am-3bm-15c^2+12bc}{6cghm}$

15) $\frac{a}{gh}+\frac{b}{ah}+\frac{d}{bh}=\frac{a^2b+b^2g+agd}{abgh}$

16) $\frac{2ax}{3bqz}-\frac{3b}{4qz}-\frac{5ah}{6mqz}=\frac{8amx-9b^2m-10abh}{12bmqz}$

17) $\frac{m-n}{m+n}-\frac{3m-2n}{m-n}=$

$\frac{(m-n)(m-n)-(3m-2n)(m+n)}{(m+n)(m-n)}=$

$\frac{m^2-2mn+n^2-3m^2+mn-2n^2}{m^2-n^2}=\frac{-2m^2-mn-n^2}{m^2-n^2}$

18) $\frac{am+b}{3a+2b}+\frac{c}{6a^2b+4ab^2}=\frac{am+b}{3a+2b}+$

$\frac{c}{2ab(3a+2b)}=\frac{(am+b)2ab+c}{2ab(3a+2b)}$

19) $\frac{a}{a^2-b^2}+\frac{b}{2a^2b-2b^3}=\frac{a}{(a+b)(a-b)}$

$+\frac{1}{2(a+b)(a-b)}=\frac{2a+1}{2(a+b)(a-b)}$

20) $\frac{a}{mn+n^2-m-n}+\frac{b}{pm+pn+mq+nq}=$
$\frac{a}{(n-1)(m+n)}+\frac{b}{(p+q)(m+n)}=$
$\frac{a(p+q)+b(n-1)}{(m+n)(p+q)(n-1)}$

21) $\frac{13a-5b}{4}-\frac{7a-2b}{6}-\frac{3a}{5}=\frac{195a-75b}{60}-$
$\frac{70a-20b}{60}-\frac{36a}{60}=\frac{89a-55b}{60}$

22) $\frac{3a-4b}{7}-\frac{2a-b-c}{3}+\frac{15a-4c}{12}=\frac{36a-48b}{84}-$
$\frac{56a-28b-28c}{84}+\frac{95a-28c}{84}=\frac{85a-20b}{84}$

23) $\frac{3a+2b}{c}-\frac{5bd-2a-3d}{4cd}=\frac{12ad+8bd}{4cd}-$
$\frac{5bd-2a-3d}{4cd}=\frac{12ad+3bd+2a+3d}{4cd}$

24) $\frac{a}{a+z}+\frac{z}{a-z}=\frac{a(a-z)+z(a+z)}{(a+z)(a-z)}=$
$\frac{a^2-az+az+z^2}{a^2-z^2}=\frac{a^2+z^2}{a^2-z^2}$

25) $\frac{f+g}{3f-2g}+\frac{5f-2g}{2f-9g}=$
$\frac{(f+g)(2f-9g)-(5f-2g)(3f-2g)}{(3f-2g)(2f-9g)}=$
$\frac{(2f^2-7fg-9g^2)-(15f^2-16fg+4g^2)}{6f^2-31fg+18g^2}=$
$\frac{9fg-13f^2-13g^2}{6f^2-31fg+18g^2}$

26) $$\frac{az}{a^2-z^2}-\frac{a-z}{a+z}=\frac{az}{a^2-z^2}-\frac{(a-z)(a-z)}{(a+z)(a-z)}=$$

$$\frac{az}{a^2-z^2}-\frac{a^2-2az+z^2}{a^2-z^2}=\frac{3az-a^2-z^2}{a^2-z^2}$$

27) $$\frac{a^3}{(a+b)^3}-\frac{ab}{(a+b)^2}+\frac{b}{a+b}=\frac{a^3}{(a+b)^3}-$$

$$\frac{ab(a+b)}{(a+b)^2(a+b)}+\frac{b(a+b)^2}{(a+b)(a+b)^2}=\frac{a^3}{(a+b)^3}-$$

$$\frac{a^2b+ab^2}{(a+b)^3}+\frac{a^2b+2ab^2+b^3}{(a+b)^3}=\frac{a^3+ab^2+b^3}{(a+b)^3}$$

28) $$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}}{\frac{e}{f}+\frac{g}{h}}=\frac{\frac{ad+bc}{bd}}{\frac{eh+fg}{fh}}=\frac{fh(ad+bc)}{bd(eh+fg)}$$

29) $$\frac{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}+\frac{e}{f}}{\frac{g}{h}+\frac{i}{k}+\frac{l}{m}}=\frac{\frac{adf+bcf+bde}{bdf}}{\frac{gkm+him+hkl}{hkm}}=$$

$$\frac{hkm(adf+bcf+bde)}{bdf(gkm+him+hkl)}$$

30) $$\frac{\frac{a}{a-b}+\frac{b}{a+b}}{\frac{a}{a-b}-\frac{b}{a+b}}=\frac{\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}+\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}}{\frac{a^2+ab}{a^2-b^2}-\frac{ab-b^2}{a^2-b^2}}=$$

$$\frac{a^2+2ab-b^2}{a^2+b^2}$$

II.

Reduktionen durch Aufhebung der Brüche.

1) $\frac{ax+x^2}{3bx-cx} = \frac{x(a+x)}{x(3b-c)} = \frac{a+x}{3b-c}$.

2) $\frac{ac+bc}{bc+cd} = \frac{c(a+b)}{c(b+d)} = \frac{a+b}{b+d}$

3) $\frac{8acd-6bcd}{6acd+4bcd} = \frac{2cd(4a-3b)}{2cd(3a+2b)} = \frac{4a-3b}{3a+2b}$

4) $\frac{14a^2-7ab}{10ac-5bc} = \frac{7a(2a-b)}{5c(2a-b)} = \frac{7a}{5c}$

5) $\frac{12a^3x^4+2a^2x^5}{18ab^2x+3b^2x^2} = \frac{2a^2x^3(6ax+x^2)}{3b^2(6ax+x^2)} = \frac{2a^2x^3}{3b^2}$

6) $\frac{6ac+9bc-5c^2}{12adf+18bdf-10cdf} = \frac{c(6a+9b-5c)}{2df(6a+9b-5c)} =$
$\frac{c}{2df}$

7) $\frac{5a^2+5ax}{a^2-x^2} = \frac{5a(a+x)}{(a-x)(a+x)} = \frac{5a}{a-x}$

8) $\frac{n^2-2n+1}{n^2-1} = \frac{(n-1)(n-1)}{(n+1)(n-1)} = \frac{n-1}{n+1}$

9) $\frac{4abm-6abm}{2m^2n-3mn^2} = \frac{2ab(2m-3m)}{mn(2m-3m)} = \frac{2ab}{mn}$

10) $$\frac{4m^2-8mn-21n^2}{6m^2-11mn-35n^2}=\frac{(2m-7n)(2m+3n)}{(2m-7n)(3m+5n)}$$
$$\frac{2m+3n}{3m+5n}$$

11) $$\frac{4a^2-9b^2+24bc-16c^2}{16c^2-4a^2+12ab-9b^2}=$$
$$\frac{(2a+3b-4c)(2a-3b-4c)}{(2a-3b-4c)(-2a+3b-4c)}=\frac{2a+3b-4c}{-2a+3b-4c}$$

12) $$\frac{ac^3-bc^5-c^7}{3bc^2+c^4}=\frac{c^2(ac-bc^3-c^5)}{c^2(3b+c^2)}=\frac{ac-bc^3-c^5}{3b+c^2}$$

13) $$\frac{21a^3b^2c-9ab^3c^2}{15a^2b^2c+3a^5b^4c^2-12ab^2c}=\frac{3ab^2c\,(7a^2c-3bc)}{3ab^2c(5ac-a^4b^2c-4)}=$$
$$\frac{7a^2c-3bc}{5ac-a^4b^2c-4}$$

14) $$\frac{a^3-x^3}{(a-x)^2}=\frac{(a-x)(a^2+ax+x^2)}{(a-x)(a-x)}=\frac{a^2+ax+x^2}{a-x}$$

15) $$\frac{a^3+ay+a^2y+y^2}{a^4-y^2}=\frac{(a+y)(a^2+y)}{(a^2-y)(a^2+y)}=\frac{a+y}{a^2-y}$$

16) $$\frac{ac+bd+ad+bc}{af+2bx+2ax+bf}=\frac{(c+d)(a+b)}{(f+2x)(a+b)}=\frac{c+d}{f+2x}$$

17) $$\frac{6ac+10bc+9ad+15bd}{6c^2+9cd-2c-3d}=\frac{(3a+5b)(2c+3d)}{(3c-1)(2c+3d)}=$$
$$\frac{3a+5b}{3c-1}$$

18) $$\frac{n^3-2n^2}{n^2-4n+4}=\frac{n^2(n-2)}{(n-2)(n-2)}=\frac{n^2}{n-2}$$

19) $\dfrac{x^2+2x-3}{x^2+5x+6} = \dfrac{(x-1)(x+3)}{(x+2)(x+3)} = \dfrac{x-1}{x+2}$

20) $\dfrac{2x^3+3x^2+x}{x^3-x^2-2x} = \dfrac{(2x+1)(x^2+x)}{(x-2)(x^2+x)} = \dfrac{2x+1}{x-2}$

21) $\dfrac{9x^3+53x^2-9x-18}{x^2+11x+30} = \dfrac{(9x-x-3)(x+6)}{(x+5)(x+6)} =$
$\dfrac{9x^2-x-3}{x+5}$

22) $\dfrac{2x^3+x^2-8x+5}{7x^2-12x+5} = \dfrac{(2x^2+3x-5)(x-1)}{(7x-5)(x-1)} =$
$\dfrac{2x^2+3x-5}{7x-5}$

23) $\dfrac{a^3b^3+c^3x^3}{a^2b^2-c^2x^2} = \dfrac{(a^2b^2-abcx+c^2x^2)(ab+cx)}{(ab-cx)(ab+cx)} =$
$\dfrac{a^2b^2-abcx+c^2x^2}{ab-cx}$

24) $\dfrac{2x^3-(3c+d+2)x^2+(3c+d)x}{x^4-x} =$
$\dfrac{(2x-3c-d)(x^2-x)}{(x^2+x+1)(x^2-x)} = \dfrac{2x-3c-d}{x^2+x+1}$

25) $\dfrac{45a^3b^4c+27a^8b^7cd-9a^4b^2d^3}{30a^2b^2c^3d^4+18a^7b^5c^3d^5-6a^3c^2d^7}$
$= \dfrac{(15a^2b^2c+9a^7b^5cd-3a^3d^3)\,3ab^2}{(15a^2b^2c+9a^7b^5cd-3a^3d^3)2c^2d^4} = \dfrac{3ab^2}{2c^2d^4}$

26) $\dfrac{a^2+b^2+c^2+2ab+2ac+2bc}{a^2-b^2-c^2-2bc} = \dfrac{(a+b+c)(a+b+c)}{(a-b-c)(a+b+c)}$
$= \dfrac{a+b+c}{a-b-c}$

27) $$\frac{a^2-3ab+ac+2b^2-2bc}{a^2-b^2+2bc-c^2}=\frac{(a-2b)(a-b+c)}{(a+b-c)(a-b+c)}=$$
$$\frac{a-2b}{a+b-c}$$

28) $$\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{2a^2b^2+2a^2c^2+2b^2c^2-a^4-b^4-c^4}=$$
$$\frac{(a+b)(a+b+c)(a+b-c)}{(c+a-b)b-a+c)(a+b+c)(a+b-c)}=$$
$$\frac{a+b}{(c+a-b)(b-a+c)}$$

29) $$\frac{10m^2x^2+10cmx-6cmx-6c^2+6md^3x+6cd^3}{9d^6+12cd^3-9cd^3-12c^2+20cmx+15md^3x}$$
$$=\frac{(10mx-6c+6d^3)(mx+c)}{(3d^3+4c)(3d^3-3c+5mx)}$$
$$=\frac{2(5mx-3c+3d^3)(mx+c)}{(3d^3+4c)(3d^3-3c+5mx)}=\frac{2(mx+c)}{3d^3+4c}$$

30) $$\frac{6a^2-12ac+10ac-20c^2+f(3a+5c)}{2f^2-8cf+3cf-12c^2+2a(2f+3c)}$$
$$=\frac{2(a-2c)(3a+5c)+f(3a+5c)}{(f-4c)(2f+3c)+2a(2f+3c)}$$
$$=\frac{(3a+5c)(2a-4c+f)}{(2f+3c)(2a-4c+f)}=\frac{3a+5c}{2f+3c}$$

III.

Reduktionen durch Verwandlungen.

1) $\sqrt{24}+\sqrt{54}-\sqrt{6} = \sqrt{4}\times\sqrt{6}+\sqrt{9}\times\sqrt{6}-\sqrt{6} = 2\sqrt{6}+3\sqrt{6}-\sqrt{6} = 4\sqrt{6}$

2) $2\sqrt{8}-7\sqrt{18}+5\sqrt{72}-\sqrt{50} = 2\sqrt{4}\times\sqrt{2}-7\sqrt{9}\times\sqrt{2}+5\sqrt{36}\times\sqrt{2}-\sqrt{25}\times\sqrt{2} = 4\sqrt{2}-21\sqrt{2}+30\sqrt{2}-5\sqrt{2} = 8\sqrt{2}$

3) $\sqrt{12}+2\sqrt{27}+3\sqrt{75}-9\sqrt{48} = \sqrt{4}\times\sqrt{3}+2\sqrt{9}\times\sqrt{3}+3\sqrt{25}\times\sqrt{3}-9\sqrt{16}\times\sqrt{3} = 2\sqrt{3}+6\sqrt{3}+15\sqrt{3}-36\sqrt{3} = -13\sqrt{3}$

4) $7\sqrt[3]{54}+3\sqrt[3]{16}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{128} = 7\sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{2}+3\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}-5\sqrt[3]{64}\times\sqrt[3]{2} = 21\sqrt[3]{2}+6\sqrt[3]{2}+\sqrt[3]{2}-20\sqrt[3]{2} = 8\sqrt[3]{2}$

5) $\sqrt[3]{81}-2\sqrt[3]{24}+\sqrt{28}+2\sqrt{63} = \sqrt[3]{27}\times\sqrt[3]{3}-2\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{3}+\sqrt{4}\times\sqrt{7}+2\sqrt{9}\times\sqrt{7} = 3\sqrt[3]{3}-4\sqrt[3]{3}+2\sqrt{7}+6\sqrt{7} = 8\sqrt{7}-\sqrt[3]{3}$

6) $\sqrt[4]{32}+2\sqrt[3]{40} = \sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{2}+2\sqrt[3]{8}\times\sqrt[3]{5} = 2\sqrt[4]{2}+4\sqrt[3]{5}$

7.) $3\sqrt{5}-2\sqrt{2}+3\sqrt{6} = \sqrt{9}\times\sqrt{5}-\sqrt{4}\times\sqrt{2}+\sqrt{9}\times\sqrt{6} = \sqrt{45}-\sqrt{8}+\sqrt{54}$

8) $5\sqrt[3]{7}+3\sqrt{2}+2\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{125}\times\sqrt[3]{7}+\sqrt{9}\times\sqrt{2}+\sqrt[4]{16}\times\sqrt[4]{3} = \sqrt[3]{875}+\sqrt{18}+\sqrt[4]{48}$

9) $\sqrt{45c^3}-\sqrt{80c^3}+\sqrt{5a^2c} = 3c\sqrt{5c}-4c\sqrt{5c}+a\sqrt{5c} = (a-c)\sqrt{5c}$

10) $\sqrt{18a^5b^3}+\sqrt{50a^3b^3} = 3a^2b\sqrt{2ab}+5ab\sqrt{2ab} = (3a^2b+5ab)\sqrt{2ab}$

11) $\sqrt[3]{16a^3b}+\sqrt{4a^2b}-\sqrt{a^2b}-\sqrt[3]{54a^3b} = 2a\sqrt[3]{2b}-3a\sqrt[3]{2b}+2a\sqrt{b}-a\sqrt{b} = a\sqrt{b}-a\sqrt[3]{2b}$

12) $\sqrt{(a^2c+a^2d)} = \sqrt{[a^2(c+d)]} = a\sqrt{(c+d)}$

13) $\sqrt{(3a^2c+6abc+3b^2c)} = \sqrt{(3c)(a^2+2ab+b^2)} = (a+b)\sqrt{3c}$

14) $\sqrt{(4a^5b^2-20a^3b^3+25ab^4)} = \sqrt{(ab^2)(4a^4-20a^2b+25b^2)} = (2a^2-5b)\sqrt{ab^2}$

15) $\sqrt{(2ax^2-4ax+2a)} = \sqrt{(2a)(x^2-2x+1)} = (x-1)\sqrt{2a}$

16) $\sqrt{\frac{a^3b-4a^2b^2+4ab^3}{c^2d^2}} = \sqrt{(ab)\left(\frac{a^2-4ab+4b^2}{c^2d^2}\right)} = \frac{a-2b}{cd}\sqrt{ab}$

17) $\sqrt{\frac{a^2x-2ax^2+x^3}{a^2+2ax+x^2}} = \sqrt{(x)\left(\frac{a^2-2ax+x^2}{a^2+2ax+x^2}\right)} = \frac{a-x}{a+x}\sqrt{x}$

18) $\sqrt{\frac{ac}{a^2bd-2ab^2d+b^3d}} = \sqrt{\left(\frac{ac}{bd}\right)\frac{1}{a^2-2ab+b^2}}$
$\frac{1}{a-b}\sqrt{\frac{ac}{bd}}$

19) $\frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{ac}{a^2-2ab+b^2}} = \frac{a-b}{a+b}\sqrt{\frac{ac}{(a-b)(a-b)}}$
$= \sqrt{\frac{(a-b)^2ac}{(a+b)^2(a-b)^2}} = \sqrt{\frac{ac}{(a+b)^2}} = \frac{\sqrt{ac}}{a+b}$

20) $\frac{a+b}{a-b}\sqrt{\frac{a-b}{a+b}} = \sqrt{\frac{(a+b)^2(a-b)}{(a-b)^2(a+b)}} = \sqrt{\frac{a+b}{a-b}}$

21) $\sqrt{\left(\frac{a^3b^2}{cd^2} - \frac{2a^2b^3}{c^2d}\right)} = \sqrt{\left[\left(\frac{a}{a^{-1}} - \frac{2b}{d^{-1}}\right)\frac{a^2b^2}{c^2d^2}\right]} =$
$\frac{ab}{cd}\sqrt{(ac-2bd)}$

22) $x\sqrt[3]{\left(\frac{8a^4}{27b^3}+\frac{16a^3}{27b^2}\right)} = x\sqrt[3]{\left[\left(a+\frac{2}{b^{-1}}\right)\frac{8a^3}{27b^3}\right]}$
$= \frac{2ax}{3b}\sqrt[3]{(a+2b)}$

23) $\sqrt{\frac{x^3+2x^2+x}{a^3+a^2b}} = \sqrt{\left(\frac{x}{a+b}\right)\frac{x^2+2x+1}{a^2}} = \frac{x+1}{a}$
$\sqrt{\frac{x}{a+b}}$

24) $\sqrt{\frac{a^3-a^2x-ax^2+x^3}{b^5c^3d}} = \sqrt{\left(\frac{a+x}{bcd}\right)\left(\frac{a^2-2ax+x^2}{b^4c^2}\right)} =$
$\frac{a-x}{b^2c}\sqrt{\frac{a+x}{bcd}}$

25) $+9\sqrt{(6\sqrt{28})} = +9\sqrt{(12\sqrt{7})} = +18\sqrt{(3\sqrt{7})} \ldots = +18\sqrt[4]{63}$

$+3\sqrt{(12\sqrt{7})} = +6\sqrt{(3\sqrt{7})} = +6\sqrt{(\sqrt{63})} \ldots = +6\sqrt[4]{63}$

$-8\sqrt{(4\sqrt{63})} = -16\sqrt{(\sqrt{63})} \ldots\ldots\ldots = -16\sqrt[4]{63}$

$+9\sqrt{(6\sqrt{28})}+3\sqrt{(12\sqrt{7})}-8\sqrt{(4\sqrt{63})} \ldots\ldots = +8\sqrt[4]{63}$

26) $+3\sqrt{(40\sqrt{12})} = +3\sqrt{(80\sqrt{3})} = +3\sqrt{(16\sqrt{75})} \ldots = +12\sqrt[4]{75}$

$+2\sqrt{(5\sqrt{48})} = +2\sqrt{(20\sqrt{3})} = +2\sqrt{(4\sqrt{75})} \ldots = +4\sqrt[4]{75}$

$-4\sqrt{(15\sqrt{27})} = -4\sqrt{(45\sqrt{3})} = -4\sqrt{(9\sqrt{75})} \ldots = -12\sqrt[4]{75}$

$+3\sqrt{(40\sqrt{12})}+2\sqrt{(5\sqrt{48})}-4\sqrt{(15\sqrt{27})} \ldots\ldots = +4\sqrt[4]{75}$

27) $+4\sqrt[3]{(6\sqrt{32})} = +4\sqrt[3]{(24\sqrt{2})} = +4\sqrt[3]{(8\sqrt{18})} \;.\;.\; = +\,8\sqrt[6]{18}$

$+\sqrt[3]{(9\sqrt{162})} = +\sqrt[3]{27\sqrt{18}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = +\,3\sqrt[6]{18}$

$+2\sqrt[3]{(75\sqrt{50})} = +2\sqrt{(375\sqrt{2})} = +2\sqrt{(125\sqrt{18})} \;.\;.\; = +10\sqrt[6]{18}$

$+4\sqrt[3]{(6\sqrt{32})}+\sqrt[3]{(9\sqrt{162})}+2\sqrt[3]{(75\sqrt{50})} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = +21\sqrt[6]{18}$

28) $+5\sqrt[3]{(4\sqrt[3]{192})} = +5\sqrt[3]{(8\sqrt[3]{24})} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = +10\sqrt[9]{24}$

$+7\sqrt[3]{(18\sqrt[3]{81})} = +7\sqrt[3]{(54\sqrt[3]{3})} = +7\sqrt[3]{(27\sqrt[3]{24})} \;.\;.\; = +21\sqrt[9]{24}$

$+5\sqrt[3]{(4\sqrt[3]{192})}+7\sqrt[3]{(18\sqrt[3]{81})} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = +31\sqrt[9]{24}$

29) $+3\sqrt[3]{8+16\sqrt{5}} = +3\sqrt[3]{(1+2\sqrt{5})8} \;.\;.\; = +6\sqrt[3]{1+2\sqrt{5}}$

$-2\sqrt[3]{1+\sqrt{20}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; = -2\sqrt[3]{1+2\sqrt{5}}$

$+3\sqrt[3]{8+16\sqrt{5}}-2\sqrt[3]{1+\sqrt{20}} \;.\;.\;.\;.\; = +4\sqrt[3]{1+2\sqrt{5}}$

30) $+3\sqrt[3]{54-36\sqrt{27}}=+3\sqrt[3]{54-108\sqrt{3}}=+3\sqrt[3]{(2-4\sqrt{3})27}= +9\sqrt[3]{2-4\sqrt{3}}$

$-\sqrt[3]{16-16\sqrt{12}}=-\sqrt[3]{16-32\sqrt{3}}=-\sqrt[3]{(2-4\sqrt{3})8}=-2\sqrt[3]{2-4\sqrt{3}}$

$+3\sqrt[3]{54-36\sqrt{27}}-\sqrt[3]{16-16\sqrt{12}} = +7\sqrt[3]{2-4\sqrt{3}}$

Elfter Abschnitt.

Der binomische Satz.

Vorbereitung.

Die Exponenten der Glieder der nten Potenz von $a \pm b$ stehen ohne Coeffizienten in folgender Ordnung:

$$a^n,\ a^{n-1}b,\ a^{n-2}b^2,\ a^{n-3}b^3,\ a^{n-4}b^4,\ \ldots\ldots\ b^n$$

Die Coeffizienten der Glieder von derselben Potenz stehen ohne Exponenten in nachstehender Ordnung:

$$\frac{n}{1}$$

$$\frac{n(n-1)}{1 \times 2}$$

$$\frac{n(u-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3}$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4}$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)\ \ldots\ldots\ 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times\ \ldots\ldots\ldots\ n}$$

Formel.

$$(a \pm b)^n = a^n \pm \frac{n}{1} a^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{1 \times 2} a^{n-2} b^2 \pm$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)}{1 \times 2 \times 3} a^{n-3}b^3 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1 \times 2 \times 3 \times 4} a^{n-4} b^4 \pm$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} a^{n-5}b^5 + \ldots\ldots\ldots \pm$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)\ \ldots\ldots\ 1}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times\ \ldots\ldots\ldots\ n} b^n$$

Von den ±, welche hier vorkommen, gehört das + zu $(a+b)^n$ und das − zu $(a-b)^n$; das letzte Glied bekömmt für ein gerades n das Zeichen +, für ein ungerades das Zeichen −.

Die Anzahl der Glieder der Reihe ist $= n+1$.

Beispiele.

1) $(a \pm b)^1 = a \pm b$

2) $(a \pm b)^2 = a^2 \pm 2ab + b^2$

3) $(a \pm b)^3 = a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3$

4) $(a \pm b)^4 = a^4 \pm 4a^3b + 6a^2b^2 \pm 4ab^3 + b^4$

5) $(a \pm b)^5 = a^5 \pm 5a^4b + 10a^3b^2 \pm 10a^2b^3 + 5ab^4 \pm b^5$

6) $(a \pm b)^6 = a^6 \pm 6a^5b + 15a^4b^2 \pm 20a^3b^3 + 15a^2b^4 \pm 6ab^5 + b^6$

7) $(a \pm b)^7 = a^7 \pm 7a^6b + 21a^5b^2 \pm 35a^4b^3 + 35a^3b^4 \pm 21a^2b^5 + 7ab^6 \pm b^7$

8) $(a \pm b)^8 = a^8 \pm 8a^7b + 28a^6b^2 \pm 56a^5b^3 + 70a^4b^4 \pm 56a^3b^5 + 28a^2b^6 \pm 8ab^7 + b^8$

9) $(a \pm b)^9 = a^9 \pm 9a^8b + 36a^7b^2 \pm 84a^6b^3 + 126a^5b^4 \pm 126a^4b^5 + 84a^3b^6 \pm 36a^2b^7 + 9ab^8 \pm b^9$

10) $(a \pm b)^{10} = a^{10} \pm 10a^9b + 45a^8b^2 \pm 120a^7b^3 + 210a^6b^4 \pm 252a^5b^5 + 210a^4b^6 \pm 120a^3b^7 + 45a^2b^8 \pm 10ab^9 + b^{10}$

11) $(a \pm b)^{11} = a^{11} \pm 11a^{10}b + 55a^9b^2 \pm 165a^8b^3 + 330a^7b^4 \pm 462a^6b^5 + 462a^5b^6 \pm 330a^4b^7 + 165a^3b^8 \pm 55a^2b^9 + 11ab^{10} \pm b^{11}$

12) $(a \pm b)^{12} = a^{12} \pm 12a^{11}b + 66a^{10}b^2 \pm 220a^9b^3 + 495a^8b^4$
$\pm 792a^7b^5 + 924a^6b^6 \pm 792a^5b^7 + 495a^4b^8 \pm 220a^3b^9 +$
$66a^2b^{10} \pm 12ab^{11} + b^{12}$

Zwölfter Abschnitt.

Logarithmen.

I.

Bezeichnung und Berechnung der Logarithmen.

1.

Bezeichnung der Logarithmen

Log. Basis	10^5	10^4	10^3	10^2	10^1	10^0	10^{-1}	10^{-2}	10^{-3}
Zahlen	100000	10000	1000	100	10	1	0,1	0,01	0,001

2.

Berechnung des Logarithmus der Zahl 3.

A = 1 B = 10	Mittlere geometrische Proportionalzahlen.	Log. A = O Log. B = 1	Mittlere arithmetische Proportionalzahlen.
$\sqrt{AB} = C$	3,16227	Log. C = $\frac{\log. A + \log. B}{2}$	0,50000
$\sqrt{AC} = D$	1,77828	Log. D = $\frac{\log. A + \log. C}{2}$	0,25000
$\sqrt{CD} = E$	2,37137	Log. E = $\frac{\log. C + \log. D}{2}$	0,37500
$\sqrt{CE} = F$	2,73842	Log. F = $\frac{\log. C + \log. E}{2}$	0,43750
$\sqrt{CF} = G$	2,94272	Log. G = $\frac{\log. C + \log. F}{2}$	0,46875
$\sqrt{CG} = H$	3,05052	Log. H = $\frac{\log. C + \log. G}{2}$	0,48437
$\sqrt{GH} = I$	2,99614	Log. I = $\frac{\log. G + \log. H}{2}$	0,47656
$\sqrt{HI} = K$	3,02321	Log. K = $\frac{\log. H + \log. I}{2}$	0,48047
$\sqrt{IK} = L$	3,00964	Log. L = $\frac{\log. I + \log. K}{2}$	0,47851
$\sqrt{IL} = M$	3,00288	Log. M = $\frac{\log. I + \log. L}{2}$	0,47754
$\sqrt{IM} = N$	2,99951	Log. N = $\frac{\log. I + \log. M}{2}$	0,47705
$\sqrt{MN} = O$	3,00120	Log. O = $\frac{\log. M + \log. N}{2}$	0,47729
$\sqrt{NO} = P$	3,00035	Log. P = $\frac{\log. N + \log. O}{2}$	0,47717
$\sqrt{NP} = Q$	2,99993	Log. Q = $\frac{\log. N + \log. P}{2}$	0,4771

Fortsetzung.

$\sqrt{PQ} = R$	3,00014	$\text{Log. } R = \frac{\text{log. } P + \text{log. } Q}{2}$	0,47714
$\sqrt{QR} = S$	3,00004	$\text{Log. } S = \frac{\text{log. } Q + \text{log. } R}{2}$	0,47712
$\sqrt{QS} = T$	2,99998	$\text{Log. } T = \frac{\text{log. } Q + \text{log. } S}{2}$	0,47712
$\sqrt{ST} = U$	3,00001	$\text{Log. } U = \frac{\text{log. } S + \text{log. } T}{2}$	0,47712
$\sqrt{TU} = V$	3,00000	$\text{Log. } V = \frac{\text{log. } T + \text{log. } U}{2}$	0,47712

II.

Formeln und deren Anwendung.

1.

Formeln für die Bestimmung der Logarithmen von Produkten, Quotienten, Potenzen und Wurzeln.

$$\text{Log. } AB = \text{log. } A + \text{log. } B$$

$$\text{log. } \frac{A}{B} = \text{log. } A - \text{log. } B$$

$$\text{log. } \frac{AB}{C} = \text{log. } A + \text{log. } B - \text{log. } C$$

$$\text{log. } A^n = n \text{ log. } A = \text{log. } P$$

$$\text{log. } \sqrt[n]{A} = \frac{\text{log. } A}{n} = \text{log. } Q$$

$$\text{log. } \sqrt[n]{A^m} = \frac{m \text{ log. } A}{n}$$

$$n = \frac{\text{log. } P}{\text{log. } Q}$$

2.

Anwendung der Formeln in Beispielen.

Multiplikation.

1) 86×73

$$\log. 86 = 1{,}93450$$
$$\log. 73 = 1{,}86332$$
$$\log. (86 \times 73) = 3{,}79782$$
$$86 \times 73 = 6278$$

2) $12{,}6 \times 5{,}24$

$$\log. 12{,}6 = 1{,}10037$$
$$\log. 5{,}24 = 0{,}71933$$
$$\log. (12{,}6 \times 5{,}24 = 1{,}81970$$
$$12{,}6 \times 5{,}24 = 66{,}024$$

3) $2{,}95 \times 0{,}75$

$$\log. 2{,}95 = 0{,}46982$$
$$\log. 0{,}75 = 0{,}87506-1$$
$$1{,}34488-1$$
$$-1 \qquad +1$$
$$\log. (2{,}95 \times 0{,}75) = 0{,}34488$$
$$2{,}95 \times 0{,}75 = 2{,}2125$$

4) $0{,}0953 \times 0{,}426$

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 0{,}0953 & = & 0{,}97909-2 \\ \log.\ 0{,}426 & = & 0{,}62941-1 \\ \hline & & 1{,}60850-3 \\ & & -1 \quad\quad +1 \\ \hline \log.\ (0{,}0953 \times 0{,}426) & = & 0{,}60850-2 \end{array}$$

$$0{,}0953 \times 0{,}426 = 0{,}0406$$

5) $0{,}093 \times 0{,}0064$

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 0{,}093 & = & 0{,}96848-2 \\ \log.\ 0{,}0064 & = & 0{,}80618-3 \\ \hline & & 1{,}77466-5 \\ & & -1 \quad\quad +1 \\ \hline \log.\ (0{,}093 \times 0{,}0064) & = & 0{,}77466-4 \end{array}$$

$$0{,}093 \times 0{,}0064 = 0{,}000595$$

6) $0{,}0005 \times 240000$

$$\begin{array}{lrl} \log.\ 0{,}0005 & = & 0{,}69897-4 \\ \log,\ 240000 & = & 5{,}38021 \\ \hline & & 6{,}07918-4 \\ & & -4 \quad\quad +4 \\ \hline \log.\ (0{,}0005 \times 240000) & = & 2{,}07918 \end{array}$$

$$0{,}0005 \times 240000 = 120$$

7) $42{,}6 \times 5{,}8 \times 0{,}24$

$$\begin{aligned}
\log.\ 42{,}6 &= 1{,}62941 \\
\log.\ 5{,}8 &= 0{,}76343 \\
\log.\ 0{,}24 &= 0{,}38021-1 \\
\hline
&\quad 2{,}77305-1 \\
&\quad -1 \qquad +1 \\
\hline
\log.(42{,}6 \times 5{,}8 \times 0{,}24) &= 1{,}77305
\end{aligned}$$

$$42{,}6 \times 5{,}8 \times 0{,}24 = 59{,}3$$

8) $84 \times 0{,}48 \times 0{,}032$

$$\begin{aligned}
\log.\ 84 &= 1{,}92428 \\
\log.\ 0{,}48 &= 0{,}68124-1 \\
\log.0{,}032 &= 0{,}50515-2 \\
\hline
&\quad 3{,}11067-3 \\
&\quad -3 \qquad +3 \\
\hline
\log.\ (84 \times 0{,}48 \times 0{,}032 &= 0{,}11067
\end{aligned}$$

$$84 \times 0{,}48 \times 0{,}032 = 1{,}29.$$

Division.

9) $\frac{6948}{57}$

$$\begin{aligned}
\log.\ 6948 &= 3{,}84186 \\
\log.\ 57 &= 1{,}75587 \\
\hline
\log.\ \frac{6948}{57} &= 2{,}08599
\end{aligned}$$

$$\frac{6948}{57} = 121{,}9$$

10)

$$\frac{77}{590}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 77 & = & 1,88649 \\
& +1 & -1 \\
\hline
& & 2,88649-1 \\
\text{log. } 590 & = & 2,77085 \\
\hline
\text{log. } \frac{77}{590} & = & 0,11564-1
\end{array}$$

$$\frac{77}{590} = 0,1305$$

11)

$$\frac{36,5}{2,2}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 36,5 & = & 1,56229 \\
\text{log. } 2,2 & = & 0,34242 \\
\hline
\text{log. } \frac{36,5}{2,2} & = & 2,21987
\end{array}$$

$$\frac{36,5}{2,2} = 16,59$$

12)

$$\frac{8,46}{12}$$

$$\begin{array}{lrl}
\text{log. } 8,46 & = & 0,92737 \\
& +1 & -1 \\
\hline
& & 1,92737-1 \\
\text{log. } 12 & = & 1,07918 \\
\hline
\text{log. } \frac{8,46}{12} & = & 0,84819-1
\end{array}$$

$$\frac{8,46}{12} = 0,705$$

13) $$\frac{2,5}{19,37}$$

$$\log.\ 2,5 = 0,39794$$
$$+1 \quad -1$$
$$1,39794-1$$
$$\log.\ 19,37 = 1,28713$$
$$\log.\ \frac{2,5}{19,37} = 0,11081-1$$
$$\frac{2,5}{19,37} = 0,129$$

14) $$\frac{0,8}{77}$$

$$\log.\ 0,8 = 0,90309-1$$
$$+1 \quad -1$$
$$1,90309-2$$
$$\log.\ 77 = 1,88649$$
$$\log.\ \frac{0,8}{77} = 0,01660-2$$
$$\frac{0,8}{77} = 0,01039$$

15) $$\frac{0,06}{8,95}$$

$$\log.\ 0,06 = 0,77815-2$$
$$+1 \quad -1$$
$$1,77815-3$$
$$\log.\ 8,95 = 0,95182$$
$$\log.\ \frac{0,06}{8,95} = 0,82633-3$$
$$\frac{0,06}{8,95} = 0,006704$$

16) $$\frac{0,03}{0,95}$$

$$\begin{array}{lcr} \log.\ 0,03 & = & 0,47712-2 \\ & & +1 \qquad -1 \\ \hline & & 1,47712-3 \\ \log.\ 0,95 & = & 0,97772-1 \\ \hline \log.\ \frac{0,03}{0,95} & = & 0,49940-2 \\ \frac{0,03}{0,95} & = & 0,03158 \end{array}$$

Multiplikation und Division.

17) $$\frac{9,5 \times 24,6}{12}$$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 9,5 & = & 0,97772 \\ \log.\ 24,6 & = & 1,39094 \\ \hline \log.\ (9,5 \times 24,6) & = & 2,36866 \\ \log.\ 12 & = & 1,07918 \\ \hline \log.\ \frac{9,5 \times 24,6}{12} & = & 1,28948 \\ \frac{9,5 \times 24,6}{12} & = & 19,475 \end{array}$$

18) $\frac{0{,}84 \times 0{,}096}{2{,}5}$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 0{,}84 & = & 0{,}92428-1 \\ \log.\ 0{,}096 & = & 0{,}98227-2 \\ \hline \log.\ (0{,}84 \times 0{,}096) & = & 1{,}90655-3 \\ \log.\ 2{,}5 & = & 0{,}39794 \\ \hline & & 1{,}50861-3 \\ & & -1 \qquad +1 \\ \hline \log.\ \frac{0{,}84 \times 0{,}096}{2{,}5} & = & 0{,}50861-2 \end{array}$$

$$\frac{0{,}84 \times 0{,}096}{2{,}5} = 0{,}0322$$

19) $\frac{0{,}009 \times 0{,}66}{0{,}05}$

$$\begin{array}{rcl} \log.\ 0{,}009 & = & 0{,}95424-3 \\ \log.\ 0{,}66 & = & 0{,}81954-1 \\ \hline \log.\ (0{,}009 \times 0{,}66) & = & 1{,}77378-4 \\ \log.\ 0{,}05 & = & 0{,}69897-2 \\ \hline & & 1{,}07481-2 \\ & & -1, \qquad +1 \\ \hline \log.\ \frac{0{,}009 \times 0{,}66}{0{,}05} & = & 0{,}07481-1 \end{array}$$

$$\frac{0{,}009 \times 0{,}66}{0{,}05} = 0{,}1188$$

20)
$$\frac{0{,}95 \times 0{,}8}{600}$$

$$\begin{aligned}
\text{log. } 0{,}95 &= 0{,}97772-1 \\
\text{log. } 0{,}8 &= 0{,}90309-1 \\
\hline
&\quad 1{,}88081-2 \\
&\quad +1, \qquad -1 \\
\hline
\text{log. } (0{,}95 \times 0{,}8) &= 2{,}88081 \\
\text{log. } 600 &= 2.77815 \\
\hline
\text{log. } \frac{0{,}95 \times 0{,}8}{600} &= 0{,}10266-3 \\
\frac{0{,}95 \times 0{,}8}{600} &= 0{,}0012666
\end{aligned}$$

Potenz-Erhebung.

21)
$$7^3$$

$$\begin{aligned}
\text{log. } 7 &= 0{,}84510 \\
&\qquad\qquad 3 \\
\hline
\text{log. } 7^3 &= 2{,}53530 \\
7^3 &= 343
\end{aligned}$$

22)
$$3{,}15^4$$

$$\begin{aligned}
\text{log. } 3{,}15 &= 0{,}49831 \\
&\qquad\qquad 4 \\
\hline
\text{log. } 3{,}15^4 &= 1{,}99324 \\
3{,}15^6 &= 98{,}456
\end{aligned}$$

3) $0{,}65^3$

$$\log.\ 0{,}65 = 0{,}81291-1$$
$$\underline{3}$$
$$2{,}43873-3$$
$$\underline{-2 \qquad +2}$$
$$\log.\ 0{,}65^3 = 0{,}43873-1$$
$$0{,}65^3 = 0{,}2746$$

4) $0{,}088^2$

$$\log.\ 0{,}088 = 0{,}94448-2$$
$$\underline{2}$$
$$1{,}88896-4$$
$$\underline{-1 \qquad +1}$$
$$\log.\ 0{,}088^2 = 0{,}88896-3$$
$$0{,}088^2 = 0{,}007744$$

Wurzel-Ausziehung.

5) $\sqrt[3]{612}$

$$\log.\ 612 = 2{,}78675$$
$$\log.\ \sqrt[3]{612} = \frac{2{,}78675}{3} = 0{,}92892$$
$$\sqrt[3]{612} = 8{,}49$$

26) $\sqrt{9,86}$

$$\log.\ 9,86 = 0,99388$$

$$\log.\ \sqrt{9,86} = \frac{0,99388}{2} = 0,49694$$

$$\sqrt{9,86} = 3,14$$

27) $\sqrt[5]{0,625}$

$$\log.\ 0,625 = 0,79588-1$$

$$\underline{+4 \qquad -4}$$

$$4,79588-5$$

$$\log.\ \sqrt[5]{0,625} = \frac{4,79588-5}{5} = 0,95918-1$$

$$\sqrt[5]{0,625} = 0,9103$$

28) $\sqrt[4]{0,084}$

$$\log.\ 0,084 = 0,92428-2$$

$$\underline{+2 \qquad -2}$$

$$2,92428-4$$

$$\log.\ \sqrt[4]{0,084} = \frac{2,92428-4}{4} = 0,73107-1$$

$$\sqrt[4]{0,084} = 0,538$$

29) $\sqrt[3]{0,0009}$

$$\log.\ 0,0009 = 0,95424-4$$

$$\underline{+2 \qquad -2}$$

$$2,95424-6$$

$$\log.\ \sqrt[3]{0,0009} = \frac{2,95424-6}{3} = 0,98475-2$$

$$\sqrt[3]{0,0009} = 0,09655$$

30) $\sqrt{0,006}$

$$\log.\ 0,006 = 0,77815-3$$
$$\ +1 \quad -1$$
$$\ 1,77815-4$$
$$\log.\ \sqrt{0,006} = 0,88907-2$$
$$\sqrt{0,006} = 0,07746$$

Potenz-Erhebung und Wurzel-Ausziehung.

31) $\sqrt[3]{8^5}$

$$\log.\ 8 = 0,90309$$
$$\ 5$$
$$\log.\ 8^5 = 4,51545$$
$$\log.\ \sqrt[3]{8^5} = \frac{4,51545}{3} = 1,50515$$
$$\sqrt[3]{8^5} = 32$$

32) $\sqrt[5]{3,6^8}$

$$\log.\ 3,6 = 0,55630$$
$$\ 8$$
$$\log.\ 3,6^8 = 4,45040$$
$$\log.\ \sqrt[5]{3,6^8} = \frac{4,45040}{5} = 0,89008$$
$$\sqrt[5]{3,6^8} = 7,764$$

33) $\sqrt[4]{0{,}077^3}$

$$\log.\ 0{,}077 = 0{,}88649-2$$
$$3$$
$$2{,}65947-6$$
$$-2 \qquad +2$$
$$\log.\ 0{,}077^3 = 0{,}65947-4$$

$$\sqrt[4]{0{,}077^3} = \frac{0{,}65947-4}{4} = 0{,}16487-1$$

$$\sqrt[4]{0{,}077^3} = 0{,}14617$$

34) $3^n = 6561$

$$n = \frac{\log.\ 6561}{\log.\ 3} = \frac{3{,}81697}{0{,}47712} = 8$$

35) $4^n = 4096$

$$n = \frac{\log.\ 4096}{\log.\ 4} = \frac{3{,}61236}{0{,}60206} = 6$$

Mit dekadischen Ergänzungen.

36) $\frac{3}{8} \times \frac{5}{6}$

$$\log.\ 3 = 0{,}47712$$
$$\log.\ 5 = 0{,}69897$$
$$\text{compl.}\ \log.\ 8 = 0{,}09691-1$$
$$\text{compl.}\ \log.\ 6 = 0{,}22185-1$$
$$1{,}49485-2$$
$$-1 \qquad +1$$
$$\log.\ (\tfrac{3}{8} \times \tfrac{5}{6}) = 0{,}49485-1$$
$$\tfrac{3}{8} \times \tfrac{5}{6} = 0{,}3125$$

37) $\dfrac{7/8}{5/6}$

$$\begin{aligned}
\text{log. } 7 &= 0{,}84510 \\
\text{log. } 6 &= 0{,}77815 \\
\text{compl. log. } 8 &= 0{,}09691-1 \\
\text{compl. log. } 5 &= 0{,}30103-1 \\
\hline
&\ 2{,}02119-2 \\
&\ -2 \qquad\quad +2 \\
\hline
\text{log. } \left(\frac{7/8}{5/6}\right) &= 0{,}02119
\end{aligned}$$

$$\frac{7/8}{5/6} = 1{,}05$$

38) $\dfrac{0{,}75 \times 0{,}16}{6{,}4}$

$$\begin{aligned}
\text{log. } 0{,}75 &= 0{,}87506-1 \\
\text{log. } 0{,}16 &= 0{,}20412-1 \\
\text{compl. log. } 6{,}4 &= 0{,}19382-1 \\
\hline
&\ 1{,}27300-3 \\
&\ -1 \qquad\quad +1 \\
\hline
\text{log. } \left(\frac{0{,}75 \times 0{,}16}{6{,}4}\right) &= 0{,}27300-2
\end{aligned}$$

$$\frac{0{,}75 \times 0{,}16}{6{,}4} = 0{,}01875$$

39) $$\frac{\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}$$

$$\begin{array}{rrl}
 & \text{log. } 4 & = 0,60206 \\
 & \text{log. } 2 & = 0,30103 \\
 & \text{log. } 9 & = 0,95424 \\
\text{compl.} & \text{log. } 5 & = 0,30103-1 \\
\text{compl.} & \text{log. } 3 & = 0,52288-1 \\
\text{compl.} & \text{log. } 7 & = 0,15490-1 \\
\hline
 & & 2,83614-3 \\
 & & -2 \qquad +2 \\
\hline
\end{array}$$

$$\text{log. } \left(\frac{\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{9}}\right) = 0,83614-1$$

$$\frac{\frac{4}{5} \times \frac{2}{3}}{\frac{7}{9}} = 0,6857$$

Tabelle

der

Quadrate, Cuben, Quadrat- und Cubik-
Wurzeln der Zahlen von
1 bis 1000.

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
1	1	1	1,0000000	1,0000000
2	4	8	1,4142136	1,2599205
3	9	27	1,7320508	1,4422496
4	16	64	2,0000000	1,5874011
5	25	125	2,2360680	1,7099759
6	36	216	2,4494897	1,8171206
7	49	343	2,6457513	1,9129312
8	64	512	2,8284271	2,0000000
9	81	729	3,0000000	2,0800837
10	100	1000	3,1622777	2,1544347
11	121	1331	3,3166248	2,2239801
12	144	1728	3,4641016	2,2894286
13	169	2197	3,6055513	2,3513347
14	196	2744	3,7416574	2,4101422
15	225	3375	3,8729833	2,4662121
16	256	4096	4,0000000	2,5198421
17	289	4913	4,1231056	2,5712816
18	324	5832	4,2426407	2,6207414
19	361	6859	4,3588989	2,6684016
20	400	8000	4,4721359	2,7144177
21	441	9261	4,5825757	2,7589243
22	484	10648	4,6904158	2,8020393
23	529	12167	4,7958315	2,8438670
24	576	13824	4,8989795	2,8844991
25	625	15625	5,0000000	2,9240177
26	676	17576	5,0990195	2,9624960
27	729	19683	5,1961524	3,0000000
28	784	21952	5,2915026	3,0365889
29	841	24389	5,3851648	3,0723168
30	900	27000	5,4772256	3,1072325
31	961	29791	5,5677644	3,1413806
32	1024	32768	5,6568543	3,1748021
33	1089	35937	5,7445626	3,2075343
34	1156	39304	5,8309519	3,2396118
35	1225	42875	5,9160798	3,2710663
36	1296	46656	6,0000000	3,3019272
37	1369	50653	6,0827625	3,3322218
38	1444	54872	6,1644140	3,3619754
39	1521	59319	6,2449980	3,3912114
40	1600	64000	6,3245553	3,4199519
41	1681	68921	6,4031242	3,4482172
42	1764	74088	6,4807407	3,4760266
43	1849	79507	6,5574385	3,5033981
44	1936	85184	6,6332496	3,5303483
45	2025	91125	6,7082039	3,5568933
46	2116	97336	6,7823300	3,5830479
47	2209	103823	6,8556547	3,6088261
48	2304	110592	6,9282032	3,6342411
49	2401	117649	7,0000000	3,6593057
50	2500	125000	7,0710678	3,6840314

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
51	2601	132651	7,1414284	3,7084298
52	2704	140608	7,2111026	3,7325111
53	2809	148877	7,2801099	3,7562858
54	2916	157464	7,3484692	3,7797631
55	3025	166375	7,4161985	3,8029525
56	3136	175616	7.4833148	3,8258624
57	3249	185193	7,5498344	3,8485011
58	3364	195112	7,6157731	3,8708766
59	3481	205379	7,6811458	3,8929965
60	3600	216000	7,7459667	3,9148676
61	3721	226981	7,8102497	3,9364972
62	3844	238328	7,8740078	3,9578915
63	3969	250047	7,9372539	3,9790571
64	4096	262144	8,0000000	4,0000000
65	4225	274625	8,0622577	4,0207256
66	4356	287496	8,1240384	4,0412401
67	4489	300763	8,1853527	4,0615480
68	4624	314432	8,2462112	4,0816551
69	4761	328509	8,3066239	4,1015661
70	4900	343000	8,3666003	4,1212853
71	5041	357911	8,4261497	4,1408178
72	5184	373248	8,4852814	4,1601676
73	5329	389017	8,5440037	4,1793390
74	5476	405224	8,6023253	4,1983364
75	5625	421875	8,6602540	4,2171633
76	5776	438976	8,7177978	4,2358236
77	5929	456533	8,7749644	4,2543210
78	6084	474552	8,8317609	4,2726386
79	6241	493039	8,8881944	4,2908404
80	6400	512000	8,9442719	4,3088695
81	6561	531441	9,0000000	4,3267487
82	6724	551368	9,0553851	4,3444815
83	6889	571787	9,1104336	4,3620707
84	7056	592704	9,1651514	4,3795191
85	7225	614125	9,2195445	4,3968296
86	7396	636056	0,2736185	4,4140049
87	7569	658503	9,3273791	4,4310476
88	7744	681472	9,3808315	4,4479602
89	7921	704969	9,4339811	4,4647451
90	8100	729000	9,4868330	4,4814047
91	8281	753571	9,5393919	4,4979414
92	8464	778688	9,5916630	4,5143574
93	8649	804357	9,6436507	4,5306549
94	8836	830584	9,6953597	4,5468359
95	9025	857375	9,7467943	4,5629026
96	9216	884736	9,7979589	4,5788570
97	9409	912673	9,8488577	4,5947009
98	9604	941192	9,8994949	4,6104363
99	9801	970299	9,9498744	4,6260650
100	10000	1000000	10,0000000	4,6415888

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
101	10201	1030301	10,0498756	4,6570095
102	10404	1061208	10,0995049	4,6723288
103	10609	1092727	10,1488915	4,6875481
104	10816	1124864	10,1980390	4,7026694
105	11025	1157625	10,2469507	4,7176940
106	11236	1191016	10,2956301	4,7326234
107	11449	1225043	10,3440804	4,7474594
108	11664	1259712	10,3923048	4,7622032
109	11881	1295029	10,4403065	4,7768562
110	12100	1331000	10,4880885	4,7914199
111	12321	1367631	10,5356537	4,8058956
112	12544	1404928	10,5830052	4,8202845
113	12769	1442897	10,6301458	4,8345881
114	12996	1481544	10,6770782	4,8488075
115	13225	1520875	10,7238053	4,8629441
116	13456	1560896	10,7703296	4,8769989
117	13689	1601613	10,8166538	4,8909730
118	13924	1643032	10,8627805	4,9048681
119	14161	1685159	10,9087121	4,9186847
120	14400	1728000	10,9544511	4,9324242
121	14641	1771561	11,0000000	4,9460874
122	14884	1815848	11,0453610	4,9596756
123	15129	1860867	11,0905365	4,9731898
124	15376	1906624	11,1355287	4,9866309
125	15625	1953125	11,1803399	5,0000000
126	15876	2000376	11,2249722	5,0132980
127	16129	2048383	11,2694276	5,0265257
128	16384	2097152	11,3137085	5,0396842
129	16641	2146689	11,3578167	5,0527744
130	16900	2197000	11,4017542	5,0657970
131	17161	2248091	11,4455231	5,0787531
132	17424	2299968	11,4891253	5,0916434
133	17689	2352637	11,5325626	5,1044687
134	17956	2406104	11,5758369	5,1172299
135	18225	2460375	11,6189500	5,1299275
136	18496	2515456	11,6619038	5,1425632
137	18769	2571353	11,7046999	5,1551368
138	19044	2628072	11,7473401	5,1676492
139	19321	2685619	11,7898261	5,1801013
140	19600	2744000	11,8321596	5,1924941
141	19881	2803221	11,8743421	5,2048279
142	20164	2863288	11,9163753	5,2171034
143	20449	2924207	11,9582607	5,2293215
144	20736	2985984	12,0000000	5,2414828
145	21025	3048625	12,0415945	5,2535878
146	21316	3112136	12,0830460	5,2656374
147	21609	3176523	12,1243556	5,2776321
148	21904	3241792	12,1655251	5,2895725
149	22201	3307949	12,2065556	5,3014592
150	22500	3375000	12,2474487	5,3132928

N:o.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
151	22801	3442951	12,2882057	5,3250740
152	23104	3511808	12,3288280	5,3368033
153	23409	3581577	12,3693169	0,3484812
154	23716	3652264	12,4096737	5,3601085
155	24025	3723875	12,4498996	5,3716853
156	24336	3796416	12,4899960	5,3832126
157	24649	3869893	12,5299641	5,3946907
158	24964	3944312	12,5698051	5,4061202
159	25281	4019679	12,6095202	5,4175016
160	25600	4096000	12,6491106	5,4288352
161	25921	4173281	12,6885775	5,4401218
162	26244	4251528	12,7279220	5,4513618
163	26569	4330747	12,7671453	5,4625556
164	26896	4410944	12,8062485	5,4737036
165	27225	4492125	12,8452326	5,4848065
166	27556	4574296	12,8840987	5,4958647
167	27889	4657463	12,9228480	5,5068784
168	28224	4741632	12,9614814	5,5178484
169	28561	4826809	13,0000000	5,5287748
170	28900	4913000	13,0384048	5,5396583
171	29241	5000211	13,0766968	5,5504993
172	29584	5088448	13,1148770	5,5612979
173	29929	5177717	13,1529464	5,5720547
174	30276	5268024	13,1909059	5'5827701
175	30625	5359375	13,2287565	5,5934447
176	30976	5451776	13,2664992	6,6040787
177	31329	5545233	13,3041347	5,6146727
178	31684	5639752	13,3416641	5,6252263
179	32041	5735339	13,3790882	5,6357408
180	32400	5832000	13,4164078	5,6462162
181	32761	5929741	13,4536240	5,6566528
182	33124	6028568	13,4907376	5,6670511
183	33489	6128487	13,5277492	5,6774114
184	33856	6229504	13,5646599	5,6877340
185	34225	6331625	13,6014705	5,6980192
186	34596	6434856	13,6381817	5,7082670
187	34969	6539203	13,6747943	5,7184790
188	35344	6644672	13,7113092	5,7286544
189	35721	6751269	13,7477271	5,7387936
190	36100	6859000	13,7840487	5,7488970
191	36481	6967871	13,8202749	5,7589652
192	36864	7077888	13,8564064	5,7689986
193	37249	7189057	13,8924440	5,7789965
194	37636	7301384	13,9283883	5,7889603
195	38025	7414875	13,9642400	5,7988907
196	38416	7529536	14,0000000	5,8087857
197	38809	7645373	14,0356688	5,8186478
198	39204	7762392	14,0712473	5,8284766
199	39601	7880599	14,1067359	5,8382724
200	40000	8000000	14,1421356	5,8480354

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
201	40401	8120601	14,1774468	5,8577661
202	40804	8242408	14,2126704	5,8674643
203	41209	8365427	14,2478069	5,8771306
204	41616	8489664	14,2828569	5,8867653
205	42025	8615125	14,3178210	5,8963688
206	42436	8741816	14,3527000	5,9059405
207	42849	8869743	14,3874946	5,9154817
208	43264	8998912	14,4222051	5,9249921
209	43681	9129329	14,4568323	5,9344721
210	44100	9261000	14,4913767	5,9439218
211	44521	9393931	14,5258390	5,9533418
212	44944	9528128	14,5602197	5'9627320
213	45369	9663597	14,5945195	5,9720926
214	45796	9800344	14,6287387	5,9814240
215	46225	9938375	14,6628783	5,9907264
216	46656	10077696	14,6969385	6,0000000
217	47089	10218313	14,7309199	6,0092449
218	47524	10360232	14,7648231	6,0184616
219	47961	10503459	14,7986485	6,0276501
220	48400	10648000	14,8323969	6,0368106
221	48841	10793861	14,8660687	6,0459436
222	49284	10941048	14,8996644	6,0550489
223	49729	11089567	14,9331845	6,0641270
224	50176	11239424	14,9666295	6,0731780
225	50625	11390625	15,0000000	6,0822019
226	51076	11543176	15,0332964	6,0911994
227	51529	11697083	15,0665192	6,1001704
228	51984	11852352	15,0996689	6,1091148
229	52441	12008989	15,1327459	6,1180332
230	52900	12167000	15,1657509	6,1269256
231	53361	12326391	15,1986841	6,1357924
232	53824	12487168	15,2315462	6,1446336
233	54289	12649337	15,2643375	6,1534494
234	54756	12812904	15,2970585	6,1622401
235	55225	12977875	15,3297097	6,1710058
236	55696	13144256	15,3622915	6,1797466
237	56169	13312053	15,3948043	6,1884628
238	56644	13481272	15,4272486	6,1971543
239	57121	13651919	15,4596248	6,2058218
240	57600	13824000	15,4919333	6,2144650
241	58081	13997521	15,5241747	6,2230843
242	58564	14172488	15,5563492	6,2316796
243	59049	14348907	15,5884573	6,2402515
244	59536	14526784	15,6204993	6,2487999
245	60025	14706125	15,6524759	6,2573247
246	60516	14886936	14,6843871	6,2658265
247	61009	15069223	15,7162337	6,2743053
248	61504	15252992	15,7480157	6,2827613
249	62001	15438249	15,7797339	6,2911946
250	62500	15625000	15,8113883	6,2996052

No.	Quadrat	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
251	63001	15813251	15,8429795	6,3079935
252	63504	16003008	15,8745079	6,3163596
253	64009	16194277	15,9059737	6,3247035
254	64516	16387064	15,9373775	6,3330255
255	65025	16581375	15,9687194	6,3413257
256	65536	16777216	16,0000000	6,3496042
257	66049	16974593	16,0312195	6,3578612
258	66564	17173512	16,0623784	6,3660968
259	67081	17373979	16,0934769	6,3743111
260	67600	17576000	16,1245155	6,3825043
261	68121	17779581	16,1554944	6,3906765
262	68644	17984728	16,1864140	6,3988279
263	69169	18191447	16,2172747	6,4069586
264	69696	18399744	16,2480768	6,4150686
265	70225	18609625	16,2788206	6,4231583
266	70756	18821096	16,3095064	6,4312275
267	71289	19034163	16,3401346	6,4392767
268	71824	19248832	16,3707055	6,4473057
269	72361	19465109	16,4012195	6,4553148
270	72900	19683000	16,4316767	6,4633041
271	73441	19902511	16,4620776	6,4712736
272	73984	20123648	16,4924225	6,4792236
273	74529	20346417	16,5227116	6,4871547
274	75076	20570824	16,5529453	6,4950653
275	75625	20796875	16,5831239	6,5029571
276	76176	21024576	16,6132477	6,5108301
277	76729	21253933	16,6433170	6,5186840
278	77284	21484952	16,6733320	6,5265188
279	77841	21717639	16,7032931	6,5343349
280	78400	21952000	16,7332005	6,5421326
281	78961	22188041	16,7630546	6,5499116
282	79524	22425768	16,7928553	6,5576722
283	80089	22665187	16,8226039	6,5654144
284	80656	22906304	16,8522995	6,5731392
285	81225	23149125	16,8819430	6,5808444
286	81796	23393656	16,9115345	6,5885323
287	82369	23639903	16,9410743	6,5962023
288	82944	23887872	16,9705628	6,6038545
289	83521	24137569	17,0000000	6,6114890
290	84100	24389000	17,0293864	6,6191059
291	84681	24642171	17,0587221	6,6267054
292	85264	24897088	17,0880075	6,6342874
293	85849	25153757	17,1172427	6,6418523
294	86436	25412184	17,1464283	6,6493997
295	87025	25672375	17,1755640	6,6569301
296	87616	25934336	17,2046505	6,6644437
297	88209	26198073	17,2336879	6,6719403
298	88804	26463592	17,2626765	6,6794200
299	89401	26730899	17,2916164	6,6868831
300	90000	27000000	17,3205081	6,6943296

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
301	90601	27270901	17,3493516	6,7017594
302	91204	27543608	17,3781472	6,7091728
303	91809	27818127	17,4068952	6,7165699
304	92416	28094464	17,4355958	6,7239508
305	93025	28372625	17,4642492	6,7313155
306	93636	28652616	17,4928557	6,7386641
307	94249	28934443	17,5214155	6,7459972
308	94864	29218112	17,5499288	6,7533128
309	95481	29503629	17,5783958	6,7606143
310	96100	29791000	17,6068168	6,7678994
311	96721	30080231	17,6351921	6,7751689
312	97344	30371328	17,6635217	6,7824228
313	97969	30664297	17,6918060	6,7896613
314	98596	30959144	17,7200452	6,7968843
315	99225	31255875	17,7482393	6,8040921
316	99856	31554496	17,7763888	6,8112846
317	100489	31855013	17,8044938	6,8184620
318	101124	32157432	17,8325545	6,8256242
319	101761	32461759	17,8605711	6,8327714
320	102400	32768000	17,8885438	6,8399037
321	103041	33076161	17,9164729	6,8470212
322	103684	33386248	17,9443584	6,8541240
323	104329	33698267	17,9722008	6,8612120
324	104976	34012224	18,0000000	6,8682855
325	105625	34328125	18,0277564	6,8753444
326	106276	34645976	18,0554701	6,8823887
327	106929	34965783	18,0831413	6,8894186
328	107584	35287552	18,1107703	6,8964344
329	108241	35611289	18,1383571	6,9034360
330	108900	35937000	18,1659021	6,9104232
331	109561	36264691	18,1934054	6,9173964
332	110224	36594368	18,2208671	6,9243555
333	110889	36926037	18,2482876	6,9313007
334	111556	37259704	18,2756669	6,9382321
335	112225	37595375	18,3030055	6,9451495
336	112896	37933056	18,3303029	6,9520533
337	113569	38272753	19,3575598	6,9589434
338	114244	38614472	18,3847763	6,9658198
339	114921	38958219	18,4119526	6,9726827
340	115600	39304000	18,4390889	6,9795321
341	116281	39651821	18,4661853	6,9863680
342	116964	40001688	18,4932420	6,9931906
343	117649	40353607	18,5202592	7,0000000
344	118336	40707584	18,5472370	7,0067961
345	119025	41063625	18,5741756	7,0135791
346	119716	41421736	18,6010752	7,0203489
347	120409	41781923	18,6279360	7,0271058
348	121104	42144192	18,6547584	7,0338496
349	121801	42508549	18,6815416	7,0405800
350	122500	42875000	18,7082869	7,0472980

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
351	123201	43243551	18,7349939	7,0540040
352	123904	43614208	18,7616630	7,0606966
353	124609	43986977	18,7882942	7,0673766
354	125316	44361864	18,8148876	7,0740439
355	126025	44738875	18,8414436	7,0806987
356	126736	45118016	18,8679622	7,0873411
357	127449	45499293	18,8944436	7,0939709
358	128164	45882712	18,9208879	7,1005883
359	128881	46268279	18,9472953	7,1071936
360	129600	46656000	18,9736659	7,1137866
361	130321	47045881	19,0000000	7,1203673
362	131044	47437928	19,0262976	7,1269359
363	131769	47832147	19,0525589	7,1334923
364	132469	48228544	19,0787840	7,1400369
365	133225	48627125	19,1049734	7,1465694
366	133956	49027896	19,1311265	7,1530901
367	134686	49430863	19,1572441	7,1595988
368	135424	49836032	19,1833261	7,1660958
369	136161	50243409	19,2093727	7,1725808
370	136900	50653000	19,2353841	7,1790543
371	137641	51064811	19,2613603	7,1855162
372	138384	51478848	19,2873015	7,1919663
373	139129	51895117	19,3132079	7,1984050
374	139876	52313624	19,3390796	7,2048321
375	140625	52734375	19,3649167	7,2112478
376	141376	53357376	19,3907194	7,2176522
377	142129	53582633	19,4164878	7,2240451
378	142884	54010152	19,4422221	7,2304267
379	143641	54439939	19,4679224	7,2367972
380	144400	54872000	19,4935887	7,2431564
381	145161	55306341	19,5192213	7,2495045
382	145924	55742968	19,5448203	7,2558415
383	146689	56181887	19,5703858	7,2621674
384	147456	56623104	19,5959180	7,2684823
385	148225	57066625	19,6214169	7,2747863
386	148996	57512456	19,6468827	7,2810794
387	149769	57960603	19,6723156	7,2873616
388	150544	58411072	19.6977156	7,2936330
389	151321	58863869	19,7230829	7,2998936
390	152100	59319000	19,7484176	7'3061436
391	152881	59776471	19,7737199	7,3123828
392	153664	60236288	19,7989899	7,3186114
393	154449	60698457	19,8242276	7,3248294
394	155236	61162984	19,8494332	7,3310369
395	156025	61629875	19,8746069	7,3372339
396	156816	62099136	19,8997487	7,3434204
397	157609	62570773	19,9248588	7,3495966
398	158404	63044792	19,9499373	7,3557622
399	159201	63521199	19,9749844	7,3619177
400	160000	64000000	20,0000000	7,3680630

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
401	160801	64481201	20,0249844	7,3741979
402	161604	64964808	20,0499376	7,3803227
403	162409	65450827	20,0748599	7,3864373
404	163216	65939264	20,0997512	7,3925416
405	164025	66430125	20,1246118	7,3986362
406	164836	66923416	20,1494417	7,4047206
407	165649	67419143	20,1742410	7,4107950
408	166464	67917312	20,1990099	7,4168595
409	167281	68417929	20,2237484	7,4229141
410	168100	68921000	20,2484567	7,4289588
411	168921	69426531	20,2731349	7,4349937
412	169744	69934528	20,2977831	7,4410189
413	170569	70444997	20,3224014	7,4470312
414	171396	70957944	20,3469899	7,4530399
415	172225	71473375	20,3715488	7,4590359
416	173056	71991296	20,3960780	7,4650223
417	173889	72511713	20,4205779	7,4709992
418	174724	73034632	20,4450483	7,4769662
419	175561	73560059	20,4694895	7,4829241
420	176400	74088000	20,4939015	7,4888723
421	177241	74618461	20,5182845	7,4948112
422	178084	75151448	20,5426386	7,5007406
423	178929	75686967	20,5669638	7,5066607
424	179776	76225024	20,5912603	7,5125715
425	180625	76765625	20,6155281	7,5184729
426	181476	77308776	20,6397677	7,5243652
427	182329	77854483	20,6639784	7,5302482
428	183184	78402752	20,6881609	7,5361220
429	184041	78953589	20,7123152	7,5419867
430	184900	79507000	20,7364413	7,5478423
431	185761	80062991	20,7605395	7,5536889
432	186624	80621568	20,7846097	7,5595260
433	187489	81182737	20,8086520	7,5653548
434	188356	81746504	20,8326667	7,5711742
435	189225	82312875	20,3566539	7,5769848
436	190096	82881856	20,8806130	7,5827865
437	190969	83453453	20,9045450	7,5885793
438	191844	84027672	20,9284495	7,5943633
439	192721	84604519	20,9523269	7,6001385
440	193600	85184000	20,9761770	7,6059050
441	194481	85766121	21,0000000	7,6116626
442	195364	86350888	21,0237960	7,6174116
443	196249	86938307	21,0475652	7,6231519
444	197136	87528384	21,0713075	7,6288836
445	198025	88121125	21,0950231	7,6346067
446	198916	88716536	21,1187121	7,6403212
447	199809	89314623	21,1423745	7,6460272
448	200704	89915392	21,1660105	7,6517247
449	201601	90518849	21,1896201	7,6574137
450	202500	91125000	21,2132034	7,6630940

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
451	203401	91733851	21,2367606	7,6687664
452	204304	92345408	21,2602916	7,6744304
453	205209	92959677	21,2837966	7,6800862
454	206116	93576664	21,3072757	7,6857333
455	207025	94196375	21,3307290	7,6913716
456	207936	94818816	21,3541565	7,6970022
457	208849	95443993	21,3775581	7,7026242
458	209764	96071912	21,4009345	7,7082391
459	210681	96702579	21,4242853	7,7138448
460	211600	97336000	21,4476106	7,7194426
461	212521	97972181	21,4709105	7,7250324
462	213444	98611128	21,4941852	7,7306140
463	214369	99252847	21,5174348	7,7361877
464	215296	99897344	21,5406592	7,7417533
465	216225	100544625	21,5638587	7,7473107
466	217156	101194696	21,5870331	7,7528605
467	218089	101847563	21,6101828	7,7584022
468	219024	102503232	21,6333076	7,7639360
469	219961	103161709	21,6564078	7,7694620
470	220900	103823000	21,6794834	7,7749806
471	221841	104487111	21,7025344	7,7804903
472	222784	105154048	21,7255609	7,7859931
473	223729	105823817	21,7485631	7,7914875
474	224676	106496424	21,7715410	7,7969745
475	225625	107171875	21,7944947	7,8024537
476	226576	107850176	21,8174242	7,8079253
477	227529	108531333	21,8403297	7,8133892
478	228484	109215352	21,8632111	7,8188450
479	229441	109902239	21,8860686	7,8242942
480	230400	110592000	21,9089022	7,8297353
481	231361	111284641	21,9317122	7,8351687
482	232324	111980168	21,9544984	7,8405949
483	233289	112678587	21,9772609	7,8460133
484	234256	113379904	22,0000000	7,8514240
485	235225	114084125	22,0227155	7,8568280
486	236196	114791256	22,0454077	7,8622241
487	237169	115501303	22,0680765	7,8676130
488	238144	116214272	22,0907220	7,8729944
489	239121	116930169	22,1133444	7,8783684
490	240100	117649000	22,1359436	7,8837352
491	241081	118370771	22,1585198	7,8890946
492	242064	119095488	22,1810730	7,8944468
493	243049	119823157	22,2036033	7,8997917
494	244036	120553784	22,2261107	7,9051294
495	245025	121287375	22,2485955	7,9104599
496	246016	122023936	22,2710575	7,9157832
497	247009	122763473	22,2934968	7,9210994
498	248004	123505992	22,3159136	7,9264085
499	249001	124251499	22,3383079	7,9317104
500	250000	125000000	22,3606798	7,9370058

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
501	251001	125751501	22,3830292	7,9422931
502	252004	126506008	22,4053565	7,9475737
503	253009	127263527	22,4276615	7,9528476
504	254016	128024064	22,4499443	7,9581144
505	255025	128787625	22,4722051	7,9633742
506	256036	129554216	22,4944437	7,9686271
507	257049	130323843	22,5166605	7,9738731
508	258064	131096512	22,5388553	7,9791122
509	259081	131872229	22,5610283	7,9843583
510	260100	132651000	22,5831795	7,9895697
511	261121	133432831	22,6053091	7,9947883
512	262144	134217728	22,6274170	8,0000000
513	263169	135005697	22,6495033	8,0052049
514	264196	135796744	22,6715681	8,0104031
515	265225	136590875	22,6936114	8,0155945
516	266256	137388096	22,7156334	8,0207793
517	267289	138188413	22,7376340	8,0259574
518	268324	138991832	22,7596136	8,0311282
519	269361	139798359	22,7815715	8,0362934
520	270400	140608000	22,8035085	8,0414515
521	271441	141420761	22,8254244	8,0466030
522	272484	142236648	22,8473193	8,0517479
523	273529	143055667	22,8691932	8,0568862
524	274576	143877824	22,8910463	8,0620180
525	275625	144703125	22,9128785	8,0671432
526	276676	145531576	22,9346898	8,0722625
527	277729	146363183	22,9564805	8,0773743
528	278784	147197952	22,9782505	8,0824800
529	279841	148035889	23,0000000	8,0875794
530	280900	148877000	23,0217288	8,0926723
531	271961	149721291	23,0434372	8,0977588
532	283024	150568768	23,0651252	8,1028385
533	284089	151419437	23,0867928	8,1079128
534	285156	152273304	23,1084400	8,1129830
535	286225	153130375	23,1300670	8,1180413
536	287296	153990656	23,1516738	8,1230962
537	288369	154854153	23,1732604	8,1281448
538	289444	155720872	23,1948270	8,1331870
539	290521	156590819	23,2163735	8,1382230
540	291600	157464000	23,2379000	8,1432528
541	292681	158340421	23,2594067	8,1482764
542	293764	159220088	23,2808935	8,1532939
543	294849	160103007	23,3023604	8,1583056
544	295936	160989184	23,3238076	8,1633102
545	297025	161878625	23,3452350	8,1683091
546	298116	162771336	23,3666429	8,1733020
547	299209	163667323	23,3880311	8,1782887
548	300304	164566592	23,4093998	8,1832694
549	301401	165469149	23,4307490	8,1882441
550	302500	166375000	23,4520788	8,1932127

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
551	303601	167284151	23,4733892	8,1981752
552	304704	168196608	23,4946802	8,2031318
553	305809	169112377	23,5159520	8,2080824
554	306916	170031464	23,5372046	8,2130271
555	308025	170953875	23,5584379	8,2179657
556	309136	171879616	23,5796522	8,2228985
557	310249	172808693	23,6008474	8,2278253
558	311364	173741112	23,6220236	8,2327463
559	312481	174676879	23,6431803	8,2376614
560	313600	175616000	23,6643191	8,2425706
561	314721	176558481	23,6854385	8,2474739
562	315844	177504328	23,7065392	8,2523715
563	316969	178453547	23,7276210	8,2572632
564	318096	179406144	23,7486841	8,2621492
565	319225	180362125	23,7697286	8,2670294
566	320356	181321496	23,7907545	8,2719038
567	321489	182284263	23,8117618	8,2767725
568	322624	183250432	23,8327506	8,2816355
569	323761	184220009	23,8537209	8,2864927
570	324900	185193000	23,8746727	8,2913443
571	326041	186169411	23,8956063	8,2961902
572	327184	187149248	23,9165215	8,3010305
573	328329	188132517	23,9374184	8,3058651
574	329476	189119224	23,9582971	8,3106941
575	330625	190109375	23,9791576	8,3155175
576	331776	191102976	24,0000000	8,3203352
577	332929	192100033	24,0208241	8,3251475
578	334084	193100552	24,0416305	8,3299542
579	335241	194104539	24,0624188	8,3347553
580	336400	195112000	24,0831891	8,3395508
581	337561	196122941	24,1039416	8,3443410
582	338724	197137368	24,1246761	8,3491256
583	339889	198155287	24,1453929	8,3539047
584	341056	199176704	24,1660919	8,3586783
585	342225	200201625	24,1867732	8,3634465
586	343396	201230056	24,2074368	8,3682094
587	344569	202262003	24,2280829	8,3729667
588	345744	203297472	24,2487113	8,3777187
589	346921	204336469	24,2693222	8,3824652
590	348100	205379000	24,2899156	8,3872065
591	349281	206425071	24,3104916	8,3919424
592	350464	207474688	24,3310500	8,3966729
593	351649	208527857	24,3515913	8,4013981
594	352836	209584584	24,3721152	8,4061180
595	354025	210644875	24,3926218	8,4108326
596	355216	211708736	24,4131112	8,4155423
597	356409	212776173	24,4335834	8,4202460
598	357604	213847192	24,4540385	8,4249447
599	358801	214921799	24,4744765	8,4296383
600	360000	216000000	24,4948974	8,4343266

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
601	361201	217081801	24,5153013	8,4390098
602	362404	218167208	24,5356883	8,4436877
603	363609	219256227	24,5560583	8,4483605
604	364816	220348864	24,5764114	8,4530281
605	366025	221445125	24,5967477	8,4576905
606	367236	222545016	24,6170672	8,4623478
607	368449	223648543	24,6373699	8,4670001
608	369664	224755712	24,6576560	8,4716472
609	370881	225866529	24,6779253	8,4762891
610	372100	226981000	24,6981781	8,4809261
611	373321	228099131	24,7184140	8,4855580
612	374544	229220928	24,7386337	8,4901847
613	375769	230346397	24,7588368	8,4948055
614	376996	231475544	24,7790234	8,4994232
615	378225	232608375	24,7991935	8,5040349
616	379456	233744896	24,8193473	8,5086417
617	380689	234885113	24,8394847	8,5132434
618	381924	236029032	24,8596058	8,5178402
619	383161	237176659	24,8797106	8,5224321
620	384400	238328000	24,8997992	8,5270189
621	385641	239483061	24,9198716	8,5316009
622	386884	240641848	24,9399278	8,5361779
623	388129	241804367	24,9599679	8,5407501
624	389376	242970624	24,9799919	8,5453173
625	390625	244140625	25,0000000	8,5498797
626	391876	245314376	25,0199920	8,5544372
627	393129	246491883	25,0399680	8,5589899
628	394384	247673152	25,0599281	8,5635377
629	395641	248858189	25,0798724	8,5680807
630	396900	250047000	25,0998007	8,5726188
631	398161	251239591	25,1197133	8,5771522
632	399424	252435968	25,1396102	8,5816808
633	400689	253636137	25,1594912	8,5862048
634	401956	254840104	25,1793566	8,5907238
635	403225	256047875	25,1992063	8,5952380
636	404496	257259456	25,2190404	8,5997476
637	405769	258474853	25,2388587	8,6042524
638	407044	259694072	25,2586619	8,6087526
639	408321	260917119	25,2784493	8,6132480
640	409600	262144000	25,2982213	8,6177388
641	410881	263374721	25,3179778	8,6222248
642	412164	264609288	25,3377189	8,6267062
643	413449	265847707	25,3574446	8,6311829
644	414736	267089984	25,3771551	8,6356551
645	416025	268336125	25,3968502	8,6401226
646	417316	269586136	25,4165300	8,6445855
647	418609	270840023	25,4361946	8,6490437
648	419904	272097792	25,4558441	8,6534974
649	421201	273359449	25,4754784	8,6579465
650	422500	274625000	25,4950970	8,6623901

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
651	423801	275894451	25,5147014	8,6668310
652	425104	277167808	25,5342906	8,6712665
653	426409	278445077	25,5538646	8,6756974
654	427716	279726264	25,5734237	8,6801238
655	429025	281011375	25,5929678	8,6845456
656	430336	282300416	25,6124969	8,6889630
657	431649	283593393	25,6320112	8,6933758
658	432964	284890312	25,6515107	8,6977842
659	434281	286191179	25.6709953	8,7021882
660	435600	287496000	25,6904651	8,7065876
661	436921	288804781	25,7099203	8,7109827
662	438244	290117528	25,7293606	8,7153733
663	439569	291434247	25,7487864	8,7197595
664	440896	292754944	25,7681974	8,7241414
665	442225	294079625	25,7875939	8,7285187
666	443556	295408296	25,8069756	8,7328917
667	444889	296740963	25,8263431	8,7372604
668	446224	298077632	25,8456959	8,7416247
669	447561	299418309	25,8650343	8,7459846
670	448900	300763000	25,8843582	8,7503401
671	450241	302111711	25,9036677	8,7546915
672	451584	303464448	25,9229628	8,7590383
673	452929	304821217	25,9422435	8,7633809
674	454276	306182024	25,9615099	8,7677192
675	455625	307546875	25,9807621	8,7720532
676	456976	308915776	26,0900000	8,7763829
677	458329	310288733	26,0192236	8,7807084
678	459684	311665752	26,0384331	8,7850296
679	461041	313046839	26,0576284	8,7893466
680	462400	314432000	26,0768096	8,7936593
681	463761	315821241	26,0959767	8,7979679
682	465124	317214568	26,1151297	8,8022721
683	466489	318611987	26,1342687	8,8065722
684	467856	320013504	26,1533936	8,8108681
685	469225	321419125	26,1725047	8,8151598
686	470596	322828856	26,1916017	8,8194473
687	471969	324242703	26,2106848	8,8237307
688	473344	325660672	26,2297541	8,8280099
689	474721	327082769	26,2488095	8,8322850
690	476100	328509000	26,2678511	8,8365559
691	477481	329939371	26,2868789	8.8408227
692	478864	331373888	26,3058929	8,8450853
693	480249	332812557	26,3248931	8,8493446
694	481636	334255384	26,3438797	8,8535985
695	483025	335702375	26,3628526	8,8578489
696	484416	337153536	26,3818119	8,8620951
697	485809	338608873	26,4007575	8,8663373
698	487204	340068392	26,4196896	8,8705757
699	488601	341532099	26,4386081	8,8748099
700	490000	343000000	26,4575131	8,8790400

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
701	491401	344472101	26,4764046	8,8832616
702	492804	345948408	26,4952825	8,8874882
703	494209	347428927	26,5141471	8,8917062
704	495616	348913664	26,5329983	8,8969204
705	497025	350402625	26'5518361	8,9001304
706	498436	351895816	26,5706605	8,9043365
707	499849	353393243	26,5894716	8,9085387
708	501264	354894912	26,6082694	8,9427368
709	502681	356400829	26,6270539	8,9169311
710	504100	357911000	26,6458252	8,9211214
711	505521	359425431	26,6645832	8,9253077
712	506944	360944128	26,6833281	8,9294902
713	508369	362467097	26,7020598	8,9336686
814	509796	363994344	26,7207784	8,9378433
715	511225	365525875	26,7394839	8,9420140
716	512656	367061696	26,7581763	8,9461808
717	514089	368601813	26,7768556	8,9503438
718	515524	370146232	26,7955220	8,9545033
719	516961	371694959	26,8141753	8,9586581
720	518400	373248000	26,8328157	8'9628095
721	519841	374805361	26,8514431	8,9669570
722	521284	376367048	26,8700577	8,9711007
723	522729	377933067	26,8886593	8,9752406
724	524176	379503424	26,9072481	8,9793766
725	525625	381078125	26,9258240	8,9835088
726	527076	382657176	26,9443871	8,9876373
727	528529	384240583	26,9629375	8,9917620
728	529984	385828352	26,9814751	8,9958829
729	531441	387420489	27,0000000	9,0000000
730	532900	389017000	27,0185121	9,0041133
731	534361	390617891	27,0370117	9,0082229
732	535824	392223168	27,0554985	9,0123287
733	537289	393832837	27,0739727	9,0164309
734	538756	395446904	27,0924344	9,0205292
735	540225	397065375	27,1108832	9,0246239
736	541696	398688256	27,1293199	9,0287148
737	543169	400315553	27,1477439	9,0328021
738	544644	401947272	27,1661554	9,0368856
739	546121	403583419	27,1845544	9,0409655
740	547600	405224000	27,2029410	9,0450418
741	549081	406869021	27,2213151	9,0491142
742	550564	408518488	27,2396769	9,0531831
743	552049	410172407	27,2580263	9,0572482
744	553536	411830784	27,2763634	9,0613098
745	555025	413493625	27,2946883	9,0653677
746	556516	415160936	27,3130006	9,0694219
747	558009	416832723	27,3313007	9,0734726
748	559504	418508992	27,3495887	9,0775197
749	561001	420189749	27,3678645	9,0815631
750	562500	421875000	27,3861277	9,0856030

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
751	564001	423564751	27,4043792	9,0896392
752	565504	425259008	27,4226184	9,0936718
753	567009	426957777	27,4408455	9,0977009
754	568516	428661064	27,4590604	9,1017265
755	570025	430368875	27,4772633	9,1057485
756	571536	432081216	27,4954541	9,1097668
757	573049	433798093	27,5136330	9,1137818
758	574564	435519512	27,5317998	9,1177931
759	576081	437245479	27,5499546	9,1218009
760	577600	438976000	27,5680975	9,1258053
761	579121	440711081	27,5862284	9,1298060
762	580644	442450728	27,6043475	9,1338033
763	582169	444194947	27,6224547	9,1377971
764	583696	445943744	27,6405499	9,1417874
765	585225	447697125	27,6586334	9,1457742
766	586756	449455096	27,6767050	9,1497576
767	588289	451217663	27,6947648	9,1537375
768	589824	452984832	27,7128129	9,1577139
769	591361	454756609	27,7308492	9,1616869
770	592900	456533000	27,7488739	9,1656564
771	594441	458314011	27,7668867	9,1696225
772	595984	460099648	27,7848879	9,1735852
773	597529	461889917	27,8028775	9,1775444
774	599076	463684824	27,8208555	9,1815003
775	600625	465484375	27,8388218	9,1854527
776	602176	467288576	27,8567765	9,1894018
777	603729	469097433	27,8747199	9,1933447
778	605284	470910952	27,8926514	9,1972896
779	606841	472729139	27,9105714	9,2012289
780	608400	474552000	27,9284801	9,2051641
781	609961	476379541	27,9463770	9,2090962
782	611524	478211768	27,9642629	9,2130251
783	613089	480048687	27,9821371	9,2169505
784	614656	481890304	28,0000000	9,2208726
785	616225	483736625	28,0178514	9,2247914
786	617796	485587656	28,0356915	9,2287068
787	619369	487443403	28,0535203	9,2326189
788	620944	489303872	28,0713377	9,2365278
789	622521	491169069	28,0891438	9,2404333
790	624100	493039000	28,1069386	9,2443355
791	625681	494913671	28,1247222	9,2482344
792	627264	496793088	28,1424945	9,2521300
793	628849	498677257	28,1602556	9,2560224
794	630436	500566184	28,1780056	9,2599111
795	632025	502459875	28,1957443	9,2637972
796	633616	504358336	28,2134719	9,2676798
797	635209	506261573	28,2311884	9,2715592
798	636804	508169592	28,2488938	9,2754352
799	638401	510082399	28,2665880	9,2793081
800	640000	512000000	28,2842712	9,2831776

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
801	641601	513922401	28,3019434	9,2870440
802	643204	515849608	28,3196045	9,2909072
803	644809	517781627	28,3372546	9,2947671
804	646416	519718464	28,3548937	9,2986239
805	648025	521660125	28,3725219	9,3024775
806	649636	523606616	28,3901391	9,3063277
807	651249	525557943	28,4077454	9,3101750
808	652864	527514112	29,4253408	9,3140190
809	654481	529475129	28,4429253	9,3178599
810	656100	531441000	28,4604989	9,3216975
811	657721	533411731	28,4780617	9,3255320
812	659344	535387328	28,4956137	9.3293634
813	660969	537367797	28,5131548	9,3331916
814	662596	539353144	28,5306850	9,3370163
815	664225	541343375	28,5482048	9,3408386
816	665856	543338496	28,5657137	9,3446574
817	667489	545338513	28,5832118	9,3484731
818	669124	547343432	28,6006993	9,3522857
819	670761	549353259	28,6181760	9,3560952
820	672400	551368000	28,6356421	9,3599022
821	674041	553387661	28,6530977	9,3637049
822	675684	555412248	28,6705423	9,3675051
823	677329	557441767	28,6879766	9,3713022
824	678976	559476224	28,7054002	9,3750963
825	680625	561515625	28,7228131	9,3788873
826	682276	563559976	28,7402157	9,3826752
827	683929	565609283	28,7576077	9,3864600
828	685584	567663552	28,7749891	9,3902418
829	687241	569722789	28,7923601	9,3940207
830	688900	571787000	28,8097206	9,3977964
831	690561	573856191	28,8270706	9,4015691
832	692224	575930368	28,8444102	9,4053387
833	693889	578009537	28,8617393	9,4091054
834	695556	580093704	28,8790581	9,4128691
835	697225	582182875	28,8963666	9,4166296
836	698896	584277056	28,9136646	9,4203872
837	700569	586376253	28,9309523	9,4241419
838	702244	588480472	28,9482296	9,4278936
839	703921	590589719	28,9654967	9,4316423
840	705600	592704000	28,9827535	9,4353880
841	707281	594823321	29,0000000	9,4391307
842	708964	596947688	29,0172362	9,4428704
843	710649	599077107	29,0344623	9,4466072
844	712336	601211584	29,0516781	9,4503410
845	714025	603351125	29,0688837	9,4540719
846	715716	605495736	29,0860791	9,4577999
847	717409	607645423	29,1032644	9,4615249
848	719104	609800192	29,1204395	9,4652469
849	720801	611960049	29,1376045	9,4689661
850	722500	614125000	29,1547595	9,4726825

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
851	724201	616295051	29,1719045	9,4763959
852	725904	618470208	29,1890390	9,4801061
853	727609	620650477	29,2061637	9,4838136
854	729316	622835864	29,2232784	9,4875182
855	731025	625026375	29,2403830	9,4912199
856	732736	627222016	29,2574777	9,4949188
857	734449	629422793	29,2745623	9,4986147
858	736164	631628712	29,2916370	9,5023078
859	737881	633839779	29,3087018	9,5059980
860	739600	636056000	29,3257566	9,5096854
861	741321	638277381	29,3428015	9,5133700
862	743044	640503928	29,3598365	9,5170519
863	744769	642735647	29,3768616	9,5207303
864	746496	644972544	29,3938769	9,5244063
865	748225	647214625	29,4108823	9,5280798
866	749956	649461896	29,4278779	9,5317497
867	751689	651714363	29,4448637	9,5354172
868	753424	653972032	29,4618397	9,5390818
869	755161	656234909	29,4788059	9,5427436
870	756900	658503000	29,4957624	9,5464027
871	758641	660776311	29,5127091	9,5500589
872	760384	663054848	29,5296461	9,5537123
873	762129	665338617	29,5465734	9,5573629
874	763876	667627624	29,5634910	9'5610180
875	765625	669921875	29,5803989	9,5646560
876	767376	672221376	29,5972972	9,5682982
877	769129	674526133	29,6141858	9,5719377
878	770884	676836152	29,6310648	9,5755745
879	772641	679151439	29,6479341	9,5792085
880	774400	681472000	29,6647939	9,5828397
881	776161	683797841	29,6816442	9,5864682
882	777924	686128968	29,6984848	9,5900939
883	779689	688465387	29,7153159	9,5937169
884	781456	690807104	29,7321375	9,5973372
885	783225	693154125	29'7489495	9,6009548
886	784996	695506456	29,7657521	9,6045695
887	786769	697864103	29,7825452	9,6081817
888	788544	700227072	29,7993288	9,6117913
889	790321	702595369	29,8161030	9,6153977
890	792100	704969000	29,8328678	9,6190017
891	793881	707347971	29,8496231	9,6226029
892	795664	709732288	29,8663690	9,6262015
893	797449	712121957	29,8831056	9,6297974
894	799236	714516984	29,8998328	9,6333907
895	801025	716917375	29,9165506	9,6369812
896	802816	719323136	29,9332591	9,6405690
897	804609	721734273	29,9499582	9,6441542
898	806404	724150792	29,9666481	9,6477367
899	808201	726572699	29,9833287	9,6513166
900	810000	729000000	30,0000000	9,6548938

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
901	811801	731432701	30,0166620	9,6584684
902	813604	733870808	30,0333145	9,6620403
903	815409	736314327	30,0499584	9,6656096
904	817216	738763264	30,0665927	9,6691762
905	819025	741217625	30,0832179	9,6727402
906	820836	743677416	30,0998339	9,6763017
907	822649	746142643	30,1164407	9,6798604
908	824464	748613312	30,1330383	9,6834166
909	826281	751089429	30,1496268	9,6869702
910	828100	753571000	30,1662062	9,6905211
911	829921	756058031	30,1827765	9,6940694
912	831744	758550528	30,1993377	9,6976151
913	833569	761048497	30,2158898	9,7011583
914	835396	763551944	30,2324329	9,7046988
915	837225	766060875	30,2489669	9,7082369
916	839056	768575296	30,2654919	9,7117723
917	840889	771095213	30,2820078	9,7153051
918	842724	773620632	30,2985148	9,7188351
919	844561	776151559	30,3150128	9,7223631
920	846400	778688000	30,3315018	9,7258883
921	648241	781229961	30,3479818	9,7294108
922	850084	783777448	30,3644529	9,7329309
923	851929	786330467	30,3809150	9,7364487
924	853776	788889024	30,3973683	9,7399634
925	855625	791453125	30,4138126	9,7434758
926	857476	794022776	30,4302481	9,7469856
927	859329	796597983	30,4466748	9,7504931
928	861184	799178752	30,4630924	9,7539979
929	863041	801765089	30,4795013	9 7575002
930	864900	804357000	30,4959013	9,7610001
931	866761	806954491	30,5122926	9,7644973
932	868624	809557568	30,5286750	9,7679922
933	870489	812166237	30,5450487	9,7714845
934	872356	814780504	30,5614136	9,7749742
935	874225	817400375	30,5777697	9,7784616
936	876096	820025856	30,5941171	9,7819465
937	877969	822656953	30,6104557	9,7854288
938	879844	825293672	30,6267857	9,7889087
939	881721	827936019	30,6431069	9,7923863
940	883600	830584000	30,6594194	9,7958611
941	885481	833237621	30,6757233	9,7993335
942	887364	835896888	30,6920187	9,8028036
943	889249	838561807	30,7083051	9,8062711
944	891136	841232384	30,7245829	9,8097362
945	893025	843908625	30,7408523	9,8131986
946	894916	846590536	30,7571130	9,8166591
947	896809	849278123	30,7733651	9,8201169
948	898704	851971392	30,7896086	9,8235723
949	900601	854670349	30,8058436	9,8270252
950	902500	857375000	30,8220700	9,8304757

Nro.	Quadrat.	Cuben.	Quad. Wurz.	Cub. Wurz.
951	904401	860085351	30,8382879	9,8339238
952	906304	862801408	30,8544972	9,8373695
953	908209	865523177	30,8706981	9,8408127
954	910116	868250664	30,8868904	9,8442536
955	912025	870983875	30,9030742	9,8476920
956	913936	873722816	30,9192497	9,8511283
957	915849	876467493	30,9354166	9,8545620
958	917764	879217912	30,9515751	9,8579929
959	919681	881974079	30,9677251	9,8614217
960	921600	884736000	30,9838668	9,8648483
961	923521	887503681	31,0000000	9,8682724
962	925444	890277128	31,0161348	9,8716941
963	927369	893056347	31,0322413	9,8751130
964	929296	895841344	31,0483494	9,8785305
965	931225	898632125	31,0644492	9,8819451
966	933156	901428696	31,0805405	9,8853574
967	935089	904231063	31,0966236	9,8887673
968	937024	907039232	31,1126983	9,8921749
969	938961	909853209	31,1287648	9,8955801
970	940900	912673000	31,1448230	9,8989830
971	942841	915498611	31,1608729	9,9023835
972	944784	918330048	31,1769145	9,9057817
973	946729	921167317	31,1929479	9,9091776
974	948676	924010424	31,2089731	9,9125712
975	950625	926859375	31,2249899	9,9159624
976	952576	929714176	31,2409987	9,9193513
977	954529	932574833	31,2569992	9,9227379
978	956484	935441352	31,2729915	9,9261222
979	958441	938313739	31,2889757	9,9295042
980	960400	941192000	31,3049517	9,9328838
981	962361	944076141	31,3209179	9,9362616
982	964324	946966168	31,3368792	9,9396363
983	966289	949862087	31,3528308	9,9430002
984	968256	952763904	31,3687743	9,8463797
985	970225	955671625	31,3847097	9,9497469
986	972196	958585256	31,4006369	9,9531138
987	974169	961504803	31,4165561	9,9564775
988	976144	964430272	31,4324673	9,9598389
989	978121	967361669	31,4483704	9,9631980
990	980100	970299000	31,4642654	9,9665543
991	982081	973242271	31,4801525	9,9699095
992	984064	976191488	31,4960315	9,9732619
993	986049	979146657	31,5119025	9,9766120
994	988036	982107784	31,5277655	9'9799599
995	990025	985074875	31,5436206	9,9833054
996	992016	988047936	31,5594677	9,9866486
997	994009	991026973	81,5753068	9,9899899
998	996004	994011992	31,5911380	9,9933288
999	998001	997002999	31,6069611	9,9966655
1000	1000000	1000000000	31,6227766	10,0000000

Dritter Theil.

Die Algebra.

Einleitung.

I.

Gleichungen vom ersten Grade.

1.

Mit einer unbekannten Größe.

1) $$a+x = b+c$$
$$x = b+c-a$$

2) $$ax-b = c$$
$$ax = c+b$$
$$x = \frac{c+b}{a}$$

3) $$\frac{ax}{b} - c = d$$
$$\frac{ax}{b} = d+c$$
$$ax = bd+bc$$
$$x = \frac{bd+bc}{a} = \frac{b(d+c)}{a}$$

4)
$$2m-3c = 3h-3m+x$$
$$2m-3c-3h+3m = x$$
$$5m-3c-3h = x$$

5)
$$6m+2mn-3b = 3f+2g-3b+x$$
$$6m+2mn = 3f+2g+x$$
$$6m+2mn-3f-2g = x$$

6)
$$3a+x-5b-2 = 7b+a+c-6$$
$$x = 7b+5b+a-3a+c-6+2$$
$$x = 12b-2a+c-4$$

7)
$$ax+c = bx+d$$
$$ax-bx = d-c$$
$$x(a-b) = d-c$$
$$x = \frac{d-c}{a-b}$$

8)
$$2b-5g-2a^2b = 3a^2b-5g+2b-x$$
$$x-2a^2b = 3a^2b$$
$$x = 3a^2b+2a^2b = 5a^2b$$

9)
$$3mx-2ac = 5x-4nx$$
$$3mx+4nx-5x = 2ac$$
$$x(3m+4n-5) = 2ac$$
$$x = \frac{2ac}{3m+4n-5}$$

10)
$$5gx+af+3mx+rx = 0$$
$$5gx+3mx+rx = -af$$
$$x(5g+3m+r) = -af$$
$$x = -\frac{af}{5g+3m+r}$$

11) $$3hx - 3a - 2mx = -5b - 3cx$$
$$3hx - 2mx + 3cx = 3a - 5b$$
$$x(3h - 2m + 3c) = 3a - 5b$$
$$x = \frac{3a - 5b}{3h - 2m + 3c}$$

12) $$\frac{m}{x} + \frac{n}{x} = c$$
$$m + n = cx$$
$$\frac{m+n}{c} = x$$

13) $$\frac{c}{x} + \frac{d}{x} = m + n - \frac{a}{x}$$
$$c + d = mx + nx - a$$
$$c + d + a = x(m+n)$$
$$\frac{c+d+a}{m+n} = x$$

14) $$\frac{a}{b+x} = \frac{c}{d+x}$$
$$a(d+x) = c(b+x)$$
$$ad + ax = bc + cx$$
$$ax - cx = bc - ad$$
$$x(a - c) = bc - ad$$
$$x = \frac{bc - ad}{a - c}$$

15) $$a + b = \sqrt{(c+x)}$$
$$(a+b)^2 = c + x$$
$$(a+b)^2 - c = x$$

16) $$\frac{ab}{x} = bc + d + \frac{1}{x}$$

$$\frac{ab-1}{x} = bc+d$$

$$x(bc+d) = ab-1$$

$$x = \frac{ab-1}{bc+d}$$

17) $$\frac{3a+x}{x} - 5 = \frac{6}{x}$$

$$\frac{3a+x-6}{x} = 5$$

$$3a+x-6 = 5x$$

$$4x = 3a-6$$

$$x = \frac{3a-6}{4}$$

18) $$2abnx+3cm = 2abm+3cnx$$

$$x(2abn-3cn) = 2abm-3cm$$

$$x = \frac{2abm-3cm}{2abn-3cn} = \frac{m(2ab-3c)}{n(2ab-3c)} = \frac{m}{n}$$

19) $$mx+n^2 = m^2-nx$$

$$x(m+n) = m^2-n^2$$

$$x = \frac{m^2-n^2}{m+n} = \frac{(m+n)(m-n)}{m+n} = m-n$$

20) $$4a^2x-2a = 9b^2x-3b$$

$$4a^2x-9b^2x = 2a-3b$$

$$x(4a^2-9b^2) = 2a-3b$$

$$x = \frac{2a-3b}{4a^2-9b^2} = \frac{2a-3b}{(2a+3b)(2a-3b)} =$$

$$\frac{1}{2a+3b}$$

21) $$x = a + \frac{bc}{d} + \frac{cfx}{de}$$

$$x - \frac{cfx}{de} = a + \frac{bc}{d}$$

$$\frac{x(de-cf)}{de} = \frac{ade+bce}{de}$$

$$x(de-cf) = ade+bce$$

$$x = \frac{ade+bce}{de-cf} = \frac{e(ad+bc)}{de-cf}$$

22) $$\frac{a(d^2+x^2)}{dx} = ac + \frac{ax}{d}$$

$$\frac{ax^2+ad^2}{dx} - \frac{ax}{d} = ac$$

$$\frac{ax^2+ad^2-ax^2}{dx} = \frac{acdx}{dx}$$

$$ax^2+ad^2-ax^2 = acdx$$

$$ad^2 = acdx$$

$$x = \frac{ad^2}{acd} = \frac{d}{c}$$

23) $$\frac{a}{bx} + \frac{c}{dx} + \frac{e}{fx} + \frac{g}{hx} =$$

$$adfh+bcfh+bdeh+bdfg = bdfhlx$$

$$x = \frac{adfh+bcfh+bdeh+bdfg}{bdfhl}$$

24) $$c = a + \frac{m(a-x)}{3a+x}$$

$$\frac{ma-mx}{3a+x} = c-a$$

$$ma-mx = cx-ax+3ac-3a^2$$

$$cx-ax+mx = ma-3ac+3a^2$$

$$x(c-a+m) = a(m-3c+3a)$$

$$x = \frac{a(m-3c+3a)}{c-a+m}$$

25) $\frac{ex}{f} + \frac{cx}{d} + \frac{ax}{b} - g = h$

$$\frac{bdex + bcfx + adfx}{bdf} = \frac{bdfg + bdfh}{bdf}$$

$$bdex + bcfx + adfx = bdfg + bdfh$$

$$x(bde + bcf + adf = bdf(g + h)$$

$$x = \frac{bdf(g+h)}{bde + bcf + adf}$$

26) $a^2x + b^2x - a^3 = b^3 - 2abx$

$$x(a^2 + 2ab + b^2) = a^3 + b^3$$

$$x = \frac{a^3 + b^3}{a^2 + 2ab + b^2} = \frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)}{(a+b)(a+b)}$$

$$= \frac{a^2 - ab + b^2}{a+b}$$

27) $a^2x - b^2x + b^3 - a^3 = 0$

$$x(a^2 - b^2) = a^3 - b^3$$

$$x = \frac{a^3 - b^3}{a^2 - b^2} = \frac{(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{(a+b)(a-b)} =$$

$$\frac{a^2 + ab + b^2}{a+b}$$

28) $a^6 - a^2b^2x - b^6 = a^4x + b^4x$

$$a^6 - b^6 = x(a^4 + a^2b^2 + b^4)$$

$$x = \frac{a^6 - b^6}{a^4 + a^2b^2 + b^4} = \frac{(a^3 + b^3)(a^3 - b^3)}{a^4 + a^2b^2 + b^4} =$$

$$\frac{(a+b)(a^2 - ab + b^2)(a-b)(a^2 + ab + b^2)}{a^4 + a^2b^2 + b^4} =$$

$$\frac{(a+b)(a-b)(a^4 + a^2b^2 + b^4)}{a^4 + a^2b^2 + b^4} = (a+b)\ (a-b)$$

$$= a^2 - b^2$$

29) $n^6x+4m^4+m^2n^2 = m^6x-n^4$

$n^6x-m^6x = -n^4-m^2n^2-m^4$

$m^6x-n^6x = m^4+m^2n^2+n^4$

$$x = \frac{m^4+m^2n^2+n^4}{m^6-n^6} =$$

$$\frac{m^4+m^2n^2+n^4}{(m+n)(m-n)(m^4+m^2n^2+n^4)} = \frac{1}{m^2-n^2}$$

30) $$\frac{m+5}{3x^3-7m} - \frac{6m^2-4mx}{3m-2x} = 2m$$

$(m+5)(3m-2x) + (6m^2-4mx)(3x^3-7m) =$
$2m(3x^3-7m)(3m-2x)$

$3m^2+15m-2mx-10x+18m^2x^3-12mx^4-42m^3$
$+28m^2x = 18m^2x^3-42m^3-12mx^4+28m^2x$

$3m^2+15m = 2mx+10x$

$$\frac{3m^2+15m}{2m+10} = x$$

31) $$\frac{3m-5n}{a-b} = a^3x+b^3x+a^2bx+ab^2x$$

$$\frac{3m-5n}{(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)} = x =$$

$$\frac{3m-5n}{a^4-b^4}$$

32) $4a^4x-3a^2b^2x+b^4 = 3a^3bx+7b^4x+a^4+3ab^3x$

$$x = \frac{a^4-b^4}{4a^4-3a^3b-3a^2b^2-3ab^3-7b^4}$$

es ist

$a^4-b^4 = (a^2+b^2)(a+b)(a-b) = (a^3+a^2b$
$+ab^2+b^3)(a-b)$

ferner

$4a^4-7a^3b+4a^3b-7a^2b^2+4ab^3-7ab^3+4ab^3$
$-7b^4$

$$a^3(4a-7b)+a^2b(4a-7b)+ab^2(4a-7b)+b^3(4a-7b)$$

$$(4a-7b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)$$

folglich

$$x = \frac{(a^3+a^2b+ab^2+b^3)(a-b)}{(4a-7b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3)}$$

$$= \frac{a-b}{4a-7b}$$

2.

Mit mehreren unbekannten Größen.

1.

$$\text{I)}\quad x+y = a$$
$$\text{II)}\quad x-y = b$$

$$\text{I+II)}\quad 2x = a+b$$
$$x = \frac{a+b}{2}$$

$$\text{I—II)}\quad 2y = a-b$$
$$y = \frac{a-b}{2}$$

2.

$$\text{I)}\quad 3x+2y = 118$$
$$\text{II)}\quad x+5y = 191$$

$$3\times\text{II} = \text{III)}\quad 3x+15y = 573$$
$$\text{I)}\quad 3x+2y = 118$$

$$\text{III—I)}\quad 13y = 455$$
$$y = \frac{455}{13} = 35$$

$$\text{II)}\quad x+175 = 191$$
$$x = 16$$

3.

$$\text{I)}\quad 2x+3y = 31$$
$$\text{II)}\quad 3x-2y = 1$$

$$\text{I)}\quad x = \frac{31-3y}{2}$$
$$\text{II)}\quad x = \frac{1+2y}{3}$$

$$\text{I = II)}\quad \frac{31-3y}{2} = \frac{1+2y}{3}$$
$$93-9y = 2+4y$$
$$93-2 = 4y+9y$$
$$91 = 13y$$
$$7 = y$$

$$\text{I)}\quad 2x+21 = 31$$
$$x = \frac{31-21}{2} = 5$$

4.

$$\text{I)}\quad 4y-3x+5 = 4$$
$$\text{II)}\quad 6x-5y = 26$$

$$\text{I)}\quad \frac{4y+1}{3} = x$$

$$\text{I in II)}\quad 6 \times \frac{4y+1}{3} - 5y = 26$$
$$8y+2-5y = 26$$
$$3y = 24$$
$$y = 8$$

$$\text{II)}\quad 6x-40 = 26$$
$$x = \frac{26+40}{6} = 11$$

5.

$$\text{I)}\quad ax = by$$
$$\text{II)}\quad x + y = c$$

$$\text{I)}\quad ax - by = 0$$
$$a \times \text{II} = \text{III)}\quad ax + ay = ac$$

$$\text{III} - \text{I} = \text{IV)}\quad ay + by = ac$$
$$y(a+b) = ac$$
$$y = \frac{ac}{a+b}$$

$$\text{II)}\quad x = c - y = \frac{bc}{a+b}$$

6.

$$\text{I)}\quad ax + by = m$$
$$\text{II)}\quad a^1x + b^1y = m^1$$

$$a^1 \times \text{I} = \text{III)}\quad aa^1x + a^1by = a^1m$$
$$a \times \text{II} = \text{IV)}\quad aa^1x + ab^1y = am^1$$

$$\text{III} - \text{IV} = \text{V)}\quad a^1by - ab^1y = a^1m - am^1$$
$$y(a^1b - ab^1) = a^1m - am^1$$
$$y = \frac{a^1m - am^1}{a^1b - ab^1}$$

$$\text{V in I} = \text{VI)}\quad ax = m - b \times \frac{a^1m - am^1}{a^1b - ab^1}$$
$$ax = \frac{a^1bm - ab^1m - a^1bm + abm^1}{a^1b - ab^1}$$
$$x = \frac{abm^1 - ab^1m}{a(a^1b - ab^1)} = \frac{bm^1 - b^1m}{a^1b - ab^1}$$

7.

$$\text{I)}\quad ax+by = m$$
$$\text{II)}\quad cx+dy = n$$

$$c\times\text{I} = \text{III)}\quad acx+bcy = cm$$
$$a\times\text{II} = \text{IV)}\quad acx+ady = an$$

$$\text{IV}-\text{III} = \text{V)}\quad ady-bcy = an-cm$$
$$y(ad-bc) = an-cm$$
$$y = \frac{an-cm}{ad-bc}$$

$$\text{I)}\quad x = \frac{m-by}{a} = \frac{dm-bn}{ad-bc}$$

8.

$$\text{I)}\quad x+y = 10$$
$$\text{II)}\quad x+z = 19$$
$$\text{III)}\quad y+z = 23$$

$$\text{II}-\text{I}=\text{IV)}\quad z-y = 9$$
$$\text{III)}\quad z+y = 23$$

$$\text{IV}+\text{III}=\text{V)}\quad 2z = 32$$
$$z = 16$$

$$\text{II)}\quad x+16 = 19$$
$$x = 3$$

$$\text{III)}\quad y+16 = 23$$
$$y = 7$$

9.

$$\text{I)}\quad 3x+5y = 161$$
$$\text{II)}\quad 7x+2z = 209$$
$$\text{III)}\quad 2y+z = 89$$

$$2\times\text{III}=\text{IV)}\quad 4y+2z = 178$$
$$\text{II)}\quad 7x+2z = 209$$

$$\text{II}-\text{IV} = \text{V})\quad 7x-4y = 31$$

$$7\times\text{I} = \text{VI})\quad 21x+35y = 1127$$
$$3\times\text{V} = \text{VII})\quad 21x+12y = 93$$

$$\text{VI}-\text{VII} = \text{VIII})\quad 47y = 1034$$
$$y = 22$$

$$\text{I})\quad 3x+110 = 161$$
$$x = 17$$

$$\text{III})\quad 44+z = 89$$
$$z = 45$$

10.

$$\text{I})\quad ax+by = c$$
$$\text{II})\quad dx+ey = f$$
$$\text{III})\quad gy+hz = l$$

$$e\times\text{I} = \text{IV})\quad aex+bey = ce$$
$$b\times\text{II} = \text{V})\quad bdx+bey = bf$$

$$\text{IV}-\text{V} = \text{VI})\quad aex-bdx = ce-bf$$
$$x(ae-bd) = ce-bf$$
$$x = \frac{ce-bf}{ae-bd}$$

$$\text{VI in II} = \text{VII})\quad d\times\frac{ce-bf}{ae-bd}+ey = f$$
$$y = \frac{f-\frac{d(ce-bf)}{ae-bd}}{e}$$
$$= \frac{aef-bdf-cde+bdf}{e(ae-bd)}$$
$$= \frac{af-cd}{ae-bd}$$

VII in III = VIII) $z = \frac{l - \frac{g(af-cd)}{ae-bde}}{h}$

$= \frac{ael-bdl-afg+cdg}{h(ae-bd)}$

$= \frac{a(el-fg)-d(bl-cg)}{h(ae-bd)}$

11.

I) $x+y+z = 3m+3n$
II) $x-y-z = -m-n$
III) $z-y-x = -m+3n$

I+II = IV) $2x = 2m+2n$
$x = m+n$

I+III = V) $2z = 2m+6n$
$z = m+3n$

IV und V in I) $m+n+y+m+3n = 3m+3n$
$y = 3m+3n-m-n-m-3n$
$y = m-n$

12.

I) $x+y+z = a$
II) $my = nx$
III) $pz = qx$

II) $y = \frac{nx}{m}$

III) $z = \frac{qx}{p}$

II und III in I = IV) $x+\frac{nx}{m}+\frac{qx}{p} = a$
$x(pm+pn+qm) = amp$

$$x = \frac{amp}{pm+pn+qm}$$

IV in II = V) $my = n \times \frac{amp}{pm+pn+qm}$

$$y = \frac{amnp}{m(pm+pn+qm)} = \frac{anp}{pm+pn+qm}$$

IV in III = VI) $pz = q \times \frac{amp}{pm+pn+qm}$

$$z = \frac{ampq}{p(pm+pn+qm)} = \frac{amq}{pm+pn+qm}$$

13.

I) $\frac{1}{x+y} = a$

II) $\frac{1}{z+x} = b$

III) $\frac{1}{y+z} = c$

I) $1 = ax+ay$

II) $1 = bx+bz$

III) $1 = cy+cz$

b×I = IV) $b = abx+aby$

a×II = V) $a = abx+abz$

IV—V = VII) $b-a = aby-abz$

ab×III = VIII) $ab = abcy+abcz$

c×VII = IX) $bc-ac = abcy-abcz$

VIII + IX = X) $ab+bc-ac = 2abcy$

$$y = \frac{ab+bc-ac}{2abc}$$

X in III) $z = \frac{ab-bc+ac}{2abc}$

X in I) $x = \frac{bc-ab+ac}{2abc}$

14.

$$\text{I)}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{y} = a$$

$$\text{II)}\quad \frac{1}{x} + \frac{1}{z} = b$$

$$\text{III)}\quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$$

$$\text{I—II} = \text{IV)}\quad \frac{1}{y} - \frac{1}{z} = a - b$$

$$\text{III)}\quad \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = c$$

$$\text{IV+III} = \text{V)}\quad \frac{2}{y} = a - b + c$$

$$y = \frac{2}{a - b + c}$$

$$\text{V in I)}\quad x = \frac{2}{a + b - c}$$

$$\text{V in III)}\quad z = \frac{2}{b + c - a}$$

15.

$$\text{I)}\quad \frac{x}{3} + \frac{y}{5} + \frac{2z}{7} = 58$$

$$\text{II)}\quad \frac{5x}{4} + \frac{y}{6} + \frac{z}{3} = 76$$

$$\text{III)}\quad \frac{x}{2} + \frac{3z}{8} + \frac{u}{5} = 79$$

$$\text{IV)}\quad y + z + u = 248$$

$$\tfrac{1}{2}\times I = V)\quad \frac{x}{6} + \frac{y}{10} + \frac{z}{7} = 29$$

$$\tfrac{1}{3}\times III = VI)\quad \frac{x}{6} + \frac{z}{8} + \frac{u}{15} = 26\tfrac{1}{3}$$

$$V - VI = VII)\quad \frac{y}{10} + \frac{z}{56} - \frac{u}{15} = 2\tfrac{2}{3}$$

$$\tfrac{1}{2}\times II = VIII)\quad \frac{5x}{8} + \frac{y}{12} + \frac{z}{6} = 38$$

$$\tfrac{5}{4}\times III = IX)\quad \frac{5x}{8} + \frac{u}{4} + \frac{15z}{32} = 98\tfrac{3}{4}$$

$$IX - VIII = X)\quad \frac{29z}{96} + \frac{u}{4} - \frac{y}{12} = 60\tfrac{3}{4}$$

$$\tfrac{1}{12}\times IV = XI)\quad \frac{y}{12} + \frac{z}{12} + \frac{u}{12} = 20\tfrac{2}{3}$$

$$X)\quad -\frac{y}{12} + \frac{29z}{96} + \frac{u}{4} = 60\tfrac{3}{4}$$

$$XI + X = XII)\quad \frac{37z}{96} + \frac{u}{3} = 81\tfrac{5}{12}$$

$$\tfrac{1}{10}\times IV = XIII)\quad \frac{y}{10} + \frac{z}{10} + \frac{u}{10} = 24\tfrac{4}{5}$$

$$VII)\quad \frac{y}{10} + \frac{z}{56} - \frac{u}{15} = 2\tfrac{2}{3}$$

$$XIII - VII = XIV)\quad \frac{23z}{280} + \frac{u}{6} = 22\tfrac{2}{15}$$

$$2\times XIV = XV)\quad \frac{23z}{140} + \frac{u}{3} = 44\tfrac{4}{15}$$

$$XII)\quad \frac{37z}{96} + \frac{u}{3} = 81\tfrac{5}{12}$$

$$XII - XV = XVI)\quad \frac{743z}{3360} = \tfrac{743}{20},\quad z = 168$$

---

aus XII) $u = 50$
aus VII) $y = 30$
aus I) $x = 12$

16.

$$\begin{array}{rl}
\text{I)} & x + x + z + u = 1 \\
\text{II)} & 16x + 8y + 4z + 2u = 9 \\
\text{III)} & 81x + 27y + 9z + 3u = 36 \\
\text{IV)} & 256x + 64y + 16z + 4u = 100
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{II—I} = \text{V)} & 15x + 7y + 3z + u = 8 \\
\text{III—II} = \text{VI)} & 65x + 19y + 5z + u = 27 \\
\text{IV—III} = \text{VII)} & 175x + 37y + 7z + u = 64
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{V—I} = \text{VIII)} & 14x + 6y + 2z = 7 \\
\text{VI—V} = \text{IX)} & 50x + 12y + 2z = 19 \\
\text{VII—VI} = \text{X)} & 110x + 18y + 2z = 37
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{IX—VIII} = \text{XI)} & 36x + 6y = 12 \\
\text{X—IX} = \text{XII)} & 60x + 6y = 18
\end{array}$$

$$\begin{array}{rl}
\text{XII—XI)} & 24x = 6 \\
 & x = \tfrac{1}{4}
\end{array}$$

---

aus XI) $y = \tfrac{1}{2}$

aus VIII) $z = \tfrac{1}{4}$

aus I) $u = 0$

II.

Gleichungen vom zweiten Grade.

1.

Rein quadratische Gleichungen.

Formel.

$$x^2 = a$$

$$x = \pm \sqrt{a}$$

Beispiele.

1) $$ax^2 = b$$
$$x^2 = \frac{b}{a}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$$

2) $$\frac{x^2}{a} = b$$
$$x^2 = ab$$
$$x = \pm\sqrt{ab}$$

3) $$\frac{ax^2}{b} = c$$
$$ax^2 = bc$$
$$x^2 = \frac{bc}{a}$$
$$x = \pm\sqrt{\frac{bc}{a}}$$

2.

Vollständig quadratische Gleichungen.

Formel.

$$x^2 \pm 2bx + b^2 = c$$
$$x = \mp b \pm \sqrt{c}$$

Beispiele.

1) $$x^2 - 6ax + 9a^2 = b$$
$$(x - 3a)^2 = b$$
$$x - 3a = \pm\sqrt{b}$$
$$x = 3a \pm \sqrt{b}$$

2) $x^2+4ax+4a^2 = b$

$(x+2a)^2 = b$

$x+2a = \sqrt{b}$

$x = -2a \pm \sqrt{b}$

3.

Unvollständig quadratische Gleichungen.

Formel.

$x^2+bx = \pm c$

$x = -\frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 \pm c)}$

$x^2-bx = \pm c$

$x = \frac{1}{2}b \pm \sqrt{(\frac{1}{4}b^2 \pm c)}$

Beispiele.

1) $x^2-x = 30$

$x = \frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+30)}$

$x = \frac{1 \pm \sqrt{121}}{2}$

$x = \frac{1+11}{2} = 6, \quad x = \frac{1-11}{2} = -5$

2) $x^2+x = 56$

$x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{(\frac{1}{4}+56)}$

$x = \frac{-1 \pm \sqrt{225}}{2}$

$x = \frac{-1+15}{2} = 7, \quad x = \frac{-1-15}{2} = -8$

3) $x^2+7x = -12$

$x = -\frac{7}{2} \pm \sqrt{(\frac{49}{4}-12)}$

$x = \frac{-7 \pm \sqrt{1}}{2}$

$x = \frac{-7+1}{2} = -3, \quad x = \frac{-7-1}{2} = -4$

4) $x^2 - 17x = -72$

$$x = {}^{17}\!/_2 \pm \sqrt{({}^{289}\!/_4 - 72)}$$

$$x = \frac{17 \pm \sqrt{1}}{2}$$

$$x = \frac{17+1}{2} = 9, \quad x = \frac{27-1}{2} = 8$$

5) $x^2 - 4x = 7$

$$x = 2 \pm \sqrt{(4+7)}$$

$$x = 2 \pm \sqrt{11}$$

$$x = 5{,}3166248$$

$$x = -1{,}3166248$$

6) $x^2 - 6x = -11$

$$x = 3 \pm \sqrt{(9-11)}$$

$$x = 3 + \sqrt{-2}$$

$$x = 3 - \sqrt{-2}$$

Erster Abschnitt.

Aufgaben vom ersten Grade mit einer unbekannten Größe.

1) Die Summe von zwei gleich großen Zahlen ist a; wie groß ist jede derselben?

Auflösung.

Wird die eine der unbekannten Zahlen $= x$ gesetzt, so ist die andere ebenfalls x, folglich:

$$x + x = a$$

$$2x = a$$

$$x = \frac{a}{2}$$

Beispiel.

Die Summe von zwei gleich großen Zahlen ist 28; wie groß ist jede derselben?

Setzt man nun nach der vorigen Aufgabe $a=28$, so ist:

$$x = \frac{a}{2} = \frac{28}{2} = 14$$

2) Die Summe zweier Zahlen, von denen die eine um b größer als die andere ist, beträgt a; welches sind die Zahlen?

Auflösung.

Die kleinere Zahl sei x; also ist die größere $x+b$; folglich

$$x+x+b = a$$
$$2x+b = a$$
$$2x = a-b$$
$$x = \frac{a-b}{2}$$ die kleinere, und

$$x+b = \frac{a-b}{2} + b = \frac{a-b+2b}{2} = \frac{a+b}{2}$$

die größere Zahl.

Beispiel.

Die Summe zweier Zahlen ist 49 die eine Zahl aber um 3 größer als die andere; welche Zahlen sind dies?

Setzt man nun nach der vorigen Aufgabe $a = 49$ und $b=3$, so ist:

$$x = \frac{a-b}{2} = \frac{49-3}{2} = \frac{46}{2} = 23$$

die kleinere, und

$$x = \frac{a+b}{2} = \frac{49+3}{2} = \frac{52}{2} = 26$$

die größere Zahl.

3) Die Zahl a soll in drei solche Theile zerlegt werden, daß der zweite um b und der dritte um c größer als der erste ist; welche Theile sind es?

Auflösung.

Der erste Theil sei x, so ist
der zweite Theil $x+b$, und
der dritte Theil $x+c$, folglich

$$x+x+b+x+c = a$$
$$3x = a-b-c$$
$$x = \frac{a-b-c}{3}$$
$$x+b = \frac{a-b-c}{3} + b = \frac{a+2b-c}{3}$$
$$x+c = \frac{a-b-c}{3} + c = \frac{a-b+2c}{3}$$

Beispiel.

Es sollen 1651 L. unter vier Personen so vertheilt werden, daß der zweite 41, der dritte 53 und der vierte 57 L. mehr als der erste erhält; welches ist der Antheil eines jeden?

Dieses Beispiel ist ein besonderer Fall der vorhergehenden Aufgabe, weil die hier verlangten Theile nicht direkt mittelst der gefundenen Formeln bestimmt werden können, da hier die Zahl in vier Theile, dort aber nur in drei getheilt wurde.

Die erste Person erhalte	x L., so bekommt
Die zweite Person	$x+41$ L.
Die dritte Person	$x+53$ —
Die vierte Person	$x+57$ —
	$4x+151$ L., folglich

$$4x+151 = 1651$$

$$x = \frac{1651-151}{4} = 375 \text{ L. erhält die erste Person.}$$

$375+41 = 416$ L. erhält die zweite Person.
$375+53 = 428$ L. erhält die dritte Person.
$375+57 = 432$ L. erhält die vierte Person.

4) Die Zahl a ist in vier solche Addenden zu zerlegen, daß jeder folgende um b größer als der vorhergehende wird; welches sind die Ausdrücke für diese Addenden?

Auflösung.

Es sei
der erste Addende x, so ist
der zweite — $x+b$
der dritte — $x+2b$
der vierte — $x+3b$

Die Summe der Addenden $4x+6b = a$

$$x = \frac{a-6b}{4} \text{ . . . . . . erster Addende.}$$

$$x+b = \frac{a-6b}{4}+b = \frac{a-2b}{4} \text{ zweiter Addende.}$$

$$x+2b = \frac{a-6b}{4}+2b = \frac{a+2b}{4} \text{ dritter Addende.}$$

$$x+3b = \frac{a-6b}{4}+3b = \frac{a+6b}{4} \text{ vierter Addende.}$$

Beispiel.

2520 L. sollen unter vier Personen so vertheilt werden, daß jeder Folgende 50 L. mehr als der Vorhergehende erhält; was bekommt jeder?

Setzt man nun nach der vorigen Aufgabe, $a = 2520$ und $b = 50$, so hat:

Die erste Person $x = \frac{2520-6\times50}{4}$ 555 L.

Die zweite Person $x+2 = \frac{2520-2\times50}{4} = 605$ —

Die dritte Person $x+2b = \frac{2520+2\times50}{4} = 655$ —

Die vierte Person $x+3b = \frac{2520+6\times50}{4} = 705$ —

5) Die Summe zweier Zahlen ist a und ihre Differenz d; welches sind die Formeln für diese zwei Zahlen?

Auflösung.

Wird die kleinere Zahl durch x bezeichnet, so ist die größere $x+d$; folglich

$$x+x+d = a$$
$$2x = a-d$$
$$x = \frac{a-d}{2}$$ der Ausdruck für die kleinere, und

$$x+d = \frac{a-d}{2} + d = \frac{a-d+2d}{2} = \frac{a+d}{2}$$ der Ausdruck für die größere Zahl.

Beispiel.

Die Summe zweier Zahlen ist 110 und ihre Differenz 36; welche Zahlen sind es?

Setzt man nun nach der vorigen Aufgabe $a = 110$ und $d = 36$, so ist die kleinere Zahl

$$\frac{110-36}{2} = \frac{74}{2} = 37$$ und

die größere Zahl $$\frac{110+36}{2} = \frac{146}{2} = 73$$

6) Das mfache und das nfache einer Zahl addirt, giebt die Summe a; welche Zahl ist es?

Auflösung.

Die unbekannte Zahl sei x, so ist, nach der Aufgabe

$$mx + nx = a$$
$$x(m + n) = a$$
$$x = \frac{a}{m + n}$$

Beispiel.

Welches ist die Zahl, deren Drei- und Vierfaches addirt 203 giebt?

Setzt man nun nach obiger Aufgabe $a = 203$, $m = 3$ und $n = 4$, so ist die unbekannte Zahl

$$\frac{203}{3+4} = \frac{203}{7} = 29$$

7) Wird das nfache einer Zahl von ihrem mfachen subtrahirt, so erhält man d als Differenz; welche Zahl ist es?

Auflösung.

Wird die unbekannte Zahl durch x bezeichnet, so ist

$$mx - nx = d$$
$$x(m - n) = d$$
$$x = \frac{d}{m - n}$$

Beispiel.

Welches ist die Zahl, deren Sechsfaches vom Zehnfachen subtrahirt 56 giebt?

Setzt man nun nach der vorigen Aufgabe $d = 58$, $n = bd$, $m = 10$, so ist die unbekannte Zahl

$$\frac{56}{10-6} = \frac{56}{4} = 14$$

8) Wenn man das erste Mal eine Zahl durch m und das zweite Mal durch n dividirt, so giebt die Summe der Quotienten die Zahl a; welches ist diese Zahl?

Auflösung.

Die unbekannte Zahl sei x, folglich

$$\frac{x}{m} + \frac{x}{n} = a$$

$$nx + mx = amn$$

$$x(m+n) = amn$$

$$x = \frac{amn}{m+n}$$

Beispiel.

Die Summe der Quotienten, wenn man eine Zahl zuerst durch 3 und dann durch 5 dividirt, beträgt 8; welche Zahl ist dies?

Setzt man nun nach voriger Aufgabe $a=8$, $m=3$ und $n = 5$, so ist die unbekannte Zahl

$$\frac{8 \times 3 \times 5}{3+5} = \frac{120}{8} = 15.$$

9) Wenn eine gewisse Zahl zuerst durch m und dann durch n dividirt wird, so giebt die Differenz der Quotienten die Zahl d; was für eine Zahl ist dies, wenn m größer als n ist?

Auflösung.

Wird die unbekannte Zahl durch x bezeichnet, so ist

$$\frac{x}{n} - \frac{x}{m} = d$$

$$mx - nx = dmn$$

$$x(m - n) = dmn$$

$$x = \frac{dmn}{m - n}$$

Beispiel.

Die Differenz der Quotienten, wenn man eine Zahl zuerst durch 3 und dann durch 8 dividirt, beträgt 5; was ist dies für eine Zahl?

Setzt man nun nach der vorigen Aufgabe $d=5$, $m=8$ und $n=3$, so ist die unbekannte Zahl

$$\frac{5\times8\times3}{8-3} = \frac{120}{5} = 24$$

10) Welche Zahl muß zum Zähler und zum Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ addirt werden, damit derselbe $=\frac{c}{d}$ werde?

Auflösung.

Zum Zähler und zum Nenner sei die Zahl x zu addiren; folglich

$$\frac{a+x}{b+x} = \frac{c}{d}$$

$$ad + dx = bc + cx$$

$$x(d - c) = bc - ad$$

$$x = \frac{bc - ad}{d - c}$$

Beispiel.

Wenn man zum Zähler und zum Nenner des Bruches $3/5$ eine gewisse Zahl addirt, so wird derselbe zu $5/6$; welche Zahl ist es?

Hier ist also $a = 3$, $b = 5$, $c = 5$ und $d = 6$; folglich

$$x = \frac{5 \times 5 - 3 \times 6}{6 - 5} = \frac{25 - 18}{6 - 5} = 7$$

11) Welche Zahl muß vom Zähler und vom Nenner des Bruches $\frac{a}{b}$ subtrahirt werden, wenn derselbe zu $\frac{c}{d}$ werden soll?

Auflösung.

Diese Zahl sei x, folglich

$$\frac{a-x}{b-x} = \frac{c}{d}$$

$$ad - dx = bc - cx$$

$$x(c-d) = bc - ac$$

$$x = \frac{bc - ad}{c - d} = \frac{ad - bc}{d - c}$$

Beispiel.

Wenn man vom Zähler und vom Nenner des Bruches $7/9$ eine gewisse Zahl subtrahirt, so wird derselbe zu $2/3$; welche Zahl ist es?

Hier ist also $a = 7$, $b = 9$, $c = 2$ und $d = 3$; folglich

$$x = \frac{7 \times 3 - 9 \times 2}{3 - 2} = \frac{21 - 18}{3 - 2} = 3$$

12) Einer meiner Bekannten ist jetzt 30, sein jüngerer Bruder 20 Jahr alt, und folglich 3:2 das Verhältniß seines Alters zu dem seines Bruders: nach wie vielen Jahren wird das Verhältniß 5 : 4 seyn?

Auflösung.

Nach x Jahren. Alsdann ist der eine 30+x und der andere 20+x Jahre alt. Mithin ist

$$30+x : 20+x = 5 : 4$$
$$4(30+x) = 5\,(20+x)$$
$$x = 20 \text{ Jahre.}$$

13) Vor wie viel Jahren hingegen war er 6 mal so alt als sein Bruder?

Auflösung.

Vor x Jahren. Damals war der ältere 30—x und der jüngere 20—x Jahre alt. Es ist also

$$30-x = 6(20-x)$$
$$x = 18 \text{ Jahre.}$$

14) Er hat aber außer dem erwähnten Bruder noch einen, der jetzt nur 6 Jahre alt ist. Wann werden seine beiden jüngern Brüder zusammen so alt seyn, als er selbst ist?

Auflösung.

Nach x Jahren. Alsdann ist der ältere 30+x, der mittlere 20+x und der jüngste 6 + x Jahre alt. Es ist daher

$$30+x = 20+x+6+x$$
$$x = 4 \text{ Jahre.}$$

15) Sein Vater ist jetzt 49 Jahr alt, und folglich sind jetzt die drei Brüder zusammen 7 Jahr älter als ihr Vater; es gab aber eine Zeit, wo der Vater genau so alt war als seine drei Söhne zusammen. Wann war es so?

Auflösung.

Vor x Jahren. Damals war der Vater 49—x und die drei Brüder zusammen waren 30—x+20—x+6—x Jahre alt. Es ist daher

$$49-x = 30-x+20-x+6-x$$
$$x = 3\tfrac{1}{2} \text{ Jahre.}$$

16) Einst sagte ihm sein Vater (der jüngste Sohn war damals noch nicht geboren), daß er um den vierten Theil älter sei als seine beiden Söhne zusammen. Wann war dies?

Auflösung.

Vor x Jahren. Damals war der Vater 49—x Jahre, und die beiden Söhne waren 30—x+20—x Jahre alt. Es ist also

$$49-x = 50-2x+\frac{50-2x}{4}$$
$$x = 9 \text{ Jahre.}$$

17) Ein Bedienter erhielt von seinem Herrn jährlich 40 fl. und eine Livrée zu seinem Lohne. Nachdem er 5 Monate gedient hatte, forderte er seine Entlassung, und erhielt für diese Zeit die Livrée und noch 6 fl. 2 btz. 2 kr. an Geld. Wie hoch wurde die Livrée gerechnet?

Auflösung.

Wenn die Livrée zu x fl. gerechnet wird, so ist der jähr-

liche Lohn $= 40 + x$; dieses macht auf einen Monat $\frac{40+x}{2}$ und folglich auf fünf Monate $\frac{5(40+x)}{12}$ Es ist daher nach der Aufgabe

$$\frac{5(40+x)}{12} = x + 6\tfrac{1}{6}$$
$$x = 18 \text{ fl}$$

18) Ein Meister nimmt einen Gesellen an und verspricht ihm 8 Batzen für jeden Tag, den er für ihn arbeitet; arbeitet er aber anderswo, so muß der Geselle ihm 5 Batzen für die Kost bezahlen. Nachdem 50 Tage verflossen waren, halten sie Abrechnung mit einander und der Geselle empfängt 21 L. 8 btz. Wie viele Tage hat er demnach für seinen Meister gearbeitet?

Auflösung.

Er habe x Tage für seinen Meister, und folglich 50—x Tage für einen andern gearbeitet; er erhält also vom Meister 8x btz. und muß dem Meister geben (50—x) 5 btz. Da er nun noch 21 L. 8 btz. = 218 btz. bezahlt erhält, so ist

$$8x - (50 - x)5 = 218$$
$$x = 36 \text{ Tage.}$$

19) Ein Arbeiter begiebt sich unter der Bedingung zu einem Meister, daß, wenn derselbe Arbeit habe, er ihm die Kost und täglich 5 btz. Lohn gäbe; habe aber der Meister keine Arbeit, so wolle er täglich 2 btz. Kostgeld geben. Wenn nun dieser Arbeiter nach 30 Tagen 8 L. vom Meister ausbezahlt erhielt, wie viel Tage mußte er nicht gearbeitet haben?

Auflösung.

Wenn der Arbeiter x Tage nicht gearbeitet hat, so hat

30 — x Tage gearbeitet. Er erhält also vom Meister 5(30—x) btz. = ½ (30—x) L. und für die Tage, die er nicht gearbeitet hat, bezahlt er 2x btz. = ⅕ x L.; folglich

$$\tfrac{1}{2}(30-x)-\tfrac{1}{5}x = 8$$
$$150-5x-2x = 80$$
$$x = 10 \text{ Tage.}$$

20) Zu Wien mußte ehedem jeder Hauseigenthümer den siebenten Theil seines erhaltenen Miethzinses als Zinssteuer kontribuiren; nachher wurde diese Auflage erhöhet, und er mußte den sechsten Theil abgeben. Um wie viel mußte er den Miethzins steigern, wenn er eben so viel als vorher übrig behalten wollte?

Auflösung.

Hier soll nur das Verhältniß beider Miethen, nicht aber die Größe der Miethen selbst angegeben werden. Es sei daher der Miethzins vor der Steigerung = x, und nach derselben = x′. Von x mußte der Hauseigenthümer ⅐ kontribuiren, es bliebt ihm also $^{6x}/_{7}$ übrig; von x′ muß er ⅙ kontribuiren, es bleibt ihm also noch $^{5x'}/_{6}$. Es ist daher nach der Aufgabe $^{6x}/_{7} = {}^{5x'}/_{6}$, und hieraus läßt sich folgende Proportion ableiten:

$$x : x' = \tfrac{5}{6} : \tfrac{6}{7} = 35 : 36.$$

Der bisherige Miethzins muß daher um $^{1}/_{35}$ gesteigert werden.

21) In einer Gesellschaft von 266 Personen, bestehend aus Offizieren, Kaufleuten und Studenten, zählt man viermal so viel Kaufleute und doppelt so viel Offiziere als Studenten. Wie viele von jedem Stande befinden sich darunter?

Auflösung.

Die Anzahl der Studenten sei $= x$,
so ist die der Kaufleute $= 4x$
und die der Offiziere $= 2x$,

mithin die Anzahl aller Personen $= 7x$; es ist also

$$7x = 266$$

folglich $x = 38$ Studenten,
$4 \times 38 = 152$ Kaufleute und
$2 \times 37 = 76$ Offiziere.

22) Eine Festung hat eine Garnison von 2600 Mann; darunter sind 9 mal so viel Infanteristen und 3 mal so viel Artilleristen als Cavalleristen. Wie viel Mann von jedem Corps befinden sich nun darin?

Auflösung.

Die Anzahl der Cavalleristen sei $= x$;
so ist die der Infanteristen $= 9x$
und die der Artilleristen $= 3x$,

mithin die Anzahl der ganzen Mannschaft $= 13x$; es ist also

$$13x = 2600$$

folglich $x = 200$ Cavalleristen,
$9 \times 200 = 1800$ Infanteristen und
$3 \times 200 = 600$ Artilleristen.

23) Alle meine Reisen zusammen genommen, erzählt ein Reisender, belaufen sich auf 3040 Meilen; davon machte ich $3\frac{1}{2}$ mal so viel zu Wasser, als zu Pferde, und $2\frac{1}{3}$ mal so viel zu Fuße, als zu Wasser. Wie viele Meilen reiste dieser Mann auf jede der drei erwähnten Arten?

Auflösung.

Die Anzahl der Meilen zu Pferde sei $= x$,
so ist die zu Wasser $= 3\frac{1}{2}x$
und die zu Fuße $2\frac{1}{3} \times 3\frac{1}{2}x = 8\frac{1}{6}x$.

Es ist also $x + 3\frac{1}{2}x + 8\frac{1}{6}x = 3040$

folglich $x = 240$ Meilen zu Pferde,
$3\frac{1}{2} \times 240 = 840$ — — Wasser und
$8\frac{1}{6} \times 240 = 1960$ — — Fuß.

24) Eine Gesellschaft von 90 Personen besteht aus Männern, Weibern und Kindern; der Männer sind 4 mehr als der Weiber, der Kinder 10 mehr als der Erwachsenen. Wie viel Männer, Weiber und Kinder befinden sich nun darunter?

Auflösung.

Die Anzahl der Weiber sei $= x$;
also ist die der Männer $= x + 4$
und die der Kinder $= 2x + 14$,

mithin die Anzahl aller Personen $= 4x + 18$; es ist also

$$4x + 18 = 90$$

folglich $x = 18$ Weiber,
$18 + 4 = 22$ Männer und
$2 \times 18 + 14 = 50$ Kinder.

25) In einer zahlreichen Gesellschaft befanden sich anfangs 3 mal so viel Herren als Frauen; später aber, als 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, wurde das Verhältniß der Anwesenden beider Geschlechter noch ungleicher; es blieben nämlich noch 5 mal so viel Herren als

als Frauen. Aus wie vielen Personen von jedem Geschlecht bestand diese Gesellschaft anfangs?

Auflösung.

War anfänglich die Zahl der Frauen $= x$, so war die der Herren $= 3x$; nachdem also 8 Männer mit ihren Frauen weggingen, blieben noch $3x-8$ Herren und $x-8$ Frauen zurück. Es ist daher

$$3x-8 : x-8 = 5 : 1.$$

also $3x-8 = (x-8)5$

folglich $x = 16$ Frauen,

und also 48 Herren.

26) Den dritten Theil meiner jährlichen Einkünfte, sagte Jemand, verwende ich auf Kost und Miethe, den achten Theil auf Kleidung und Wäsche, den zehnten Theil auf Nebenausgaben, und erspare dabei noch jährlich 318 fl. Wie hoch belaufen sich seine jährlichen Einkünfte?

Auflösung.

Wenn seine Einkünfte $= x$ gesetzt werden,
so zahlte er für Kost und Miethe $\frac{1}{3}x$,
für Kleidungsstücke und Wäsche $\frac{1}{8}x$,
für Nebenansgaben $\frac{1}{10}x$,
Nun bleiben ihm noch 318 fl übrig.
Es ist also $\frac{1}{3}x+\frac{1}{8}x+\frac{1}{10}x+318 = x$
folglich $x = 720$ fl

27) Jetzt, sagte Jemand, verwende ich den siebenten Theil meines Gehaltes auf Bücher, und das Uebrige auf meine ordentlichen Ausgaben; könnte ich aber eine Gehaltszulage von 100 fl erhalten, so würde ich den fünften Theil meines Gehaltes darauf wenden, und doch noch 40 fl mehr als vorher zur Bestreitung meiner ordentlichen Ausgaben übrig behalten. Wieviel Gehalt hatte er?

Auflösung.

Der Gehalt sei x; davon wird $\frac{1}{7}$ zu Büchern verwendet, folglich bleibt $\frac{6x}{7}$. Wird aber der Gehalt um 100 fl. vermehrt, und davon $\frac{1}{5}$ zu Bücher verwendet, so bleibt $\frac{4(x+100)}{5}$ Nun ist der letzte Rest um 40 fl. größer als der erstere; es ist daher

$$\frac{4(x+100)}{5} = \frac{6x}{7} + 40$$

folglich $x = 700$ fl.

28) Ein Oberst wollte sein Regiment in ein Quadrat stellen. Er versuchte es auf zwei Arten. Das erstemal blieben ihm 39 Mann übrig; das zweitemal, da er die Seite des Quadrats um einen Mann vergrößerte, fehlten ihm 50 Mann, um das Quadrat voll zu machen. Wie stark war das Regiment?

Auflösung.

Man nehme an, der Oberst habe beim ersten Mal x Mann zur Seite des Quadrats gewählt. Die Anzahl der Mannschaft, welche in einem solchen Quadrat aufgestellt werden kann, ist $= x^2$. Da ihm aber bei dieser Stellung 39 Mann übrig bleiben, so muß das ganze Regiment x^2+39 Mann stark seyn. Wählt er ferner zur Seite seines Quadrats $x+1$ Mann, so ist die Anzahl der Mannschaft, welche in einem solchen Quadrat gestellt werden können $=(x+1)^2$. Da ihm aber alsdann 50 Mann zur Ergänzung des Quadrats fehlen, so muß das ganze Regiment $(x+1)^2-50$ Mann stark seyn. Es ist demnach

$$x^2+39 = (x+1)^2-50$$

folglich $x = 44$ Mann, welche er anfangs zur Seite seines Quadrats wählte. Hieraus ergiebt sich die Stärke des Regiments

$$= 44^2+39 = 1975 \text{ Mann.}$$

oder $(44+1)^2-50 = 1975$ Mann.

29) Ein Capitalist ziehet von seinen auf Zinsen stehenden Capitalien 2940 L. jährlicher Renten; $\frac{4}{5}$ derselben trägt 4, und $\frac{1}{5}$ trägt 5 Prozent. Wie viel Geld hat er ausstehen?

Auflösung.

Das sämmtliche Capital sei x

Es ist daher $\frac{1}{25} \times \frac{4}{5}x + \frac{1}{20} \times \frac{1}{5}x = 2940.$

folglich $x = 70000$ L.

30) Ein Kaufmann soll in drei Terminen folgende Zahlungen leisten: 2832 L. nach 3, 2560 L. nach 9 und 1459 L. nach 16 Monaten. Der Gläubiger wünscht die ganze Summe von 6842 L. auf einmal zu erhalten. Wann muß die Zahlung geschehen?

Auflösung.

Es ist einleuchtend, daß sich, bei gleichen Prozenten, die Interessen von verschiedenen Zeiten wie die Produkte aus den Zeiten in die Capitalien verhalten. Denn es sei z. B. ein Capital a zu p Prozent jährlicher Zinsen ausgeliehen, so betragen die Interessen auf ein Jahr $\frac{ap}{100}$, und auf m Jahre $\frac{amp}{100}$. Nun sei ein anderes Capital b ebenfalls zu p Prozent jährlicher Zinsen ausgeliehen, so betragen die Interessen auf ein Jahr $\frac{bp}{100}$, und auf n Jahre $\frac{bpn}{100}$. Es verhalten sich also die Interessen, welche die Capitalien a und b in den Zeiten m und n getragen haben, wie $\frac{apm}{100} : \frac{bpn}{100} = am : bn$. Soll daher die Zahlung nach x Monaten geschehen, so ist

$$6842x = 2832 \times 3 + 2560 \times 9 + 1450 \times 16$$

folglich $x = 8$ Monate.

31) Eine gewisse Summe ist, wie folgt, zu bezahlen: 1376 L. nach 5 Monaten, 3 Monate später 2560 L. und der Rest wieder 5 Monate später. Sollte die ganze Summe auf einmal entrichtet werden, so müßte es nach 10 Monaten geschehen. Wie viel war überhaupt zu bezahlen?

Auflösung.

Das ganze Capital sei x. So konnte der Schuldner 1376 L. 5 Monat, 2560 L. 8 Monat und x—3936 L. 13 Monat benutzen, welches ihm $1376 \times 5 + 2560 \times 8 + (x - 3936)13$ Interessen bringt. Nun soll er das ganze Capital nach 10 Monaten bezahlen; dieses bringt ihm 10x Interessen, also

$$10x = 1376 \times 5 + 2560 \times 8 + (x - 3936)13$$

folglich $x = 7936$ L.

32) Zu einem bevorstehenden Kriege sollen drei Städte, A, B, C ihr Contingent von 594 Mann stellen; die Vertheilung soll nach Verhältniß ihrer Volksmenge geschehen. Wenn nun die Volksmenge von A sich zu der von B wie 3 zu 5, die Volksmenge von B aber sich zu der von C wie 8 zu 7 verhält: wie viel Mann wird alsdann jede Stadt stellen müssen?

Auflösung.

A stelle x Mann,

so muß B $\frac{5x}{3}$ Mann

und C $\frac{7 \times 5x}{8 \times 3} = \frac{35x}{24}$ Mann stellen.

Es ist daher $x + \frac{5x}{3} + \frac{35x}{24} = 594$

folglich $x =$ 144 Mann für A,
mithin 240 — — B
und 210 — — C

33) Eine Schuldmaße von 21000 fl soll unter vier Gläubiger A, B, C, D nach Verhältniß ihrer Forderungen vertheilt werden. Nun verhält sich die Forderung des A zu der des B, wie 2 zu 3, die Forderung des B zu der des C, wie 4 zu 5, und die Forderung des C zu der des D, wie 6 zu 7. Wie viel erhält demnach jeder Gläubiger?

Auflösung.

A erhalte x fl;

so erhält B $\frac{3x}{2}$

C $\frac{5 \times 3x}{4 \times 2} = \frac{15x}{8}$

und D $\frac{7 \times 15x}{6 \times 8} = \frac{105x}{48} = \frac{35x}{16}$

Es ist also $x + \frac{3x}{2} + \frac{15x}{8} + \frac{35x}{16} = 21000$

folglich $x =$ 3200 fl für A,
mithin 4800 — — B,
6000 — — C
und 7000 — — D.

34) 1520 fl sollen unter drei Personen A, B, C so getheilt werden, daß B 100 fl mehr als A, C aber 270 fl mehr als B erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Auflösung.

A erhalte x fl,
so erhält B = x + 100 —
und C = x + 370 —

Es ist also 3x + 470 = 1520;
fölglich x = 350 fl für A,
mithin 450 — — B
und 720 — — C

35) Eine Wiese von 8000 Quadratruthen soll unter drei Bauerhöfe A, B, C so vertheilt werden, daß B 276 Quadratruthen weniger als A, C aber 1112 Quadratruthen mehr als B erhalte. Wie viel wird jeder bekommen?

Auflösung.

B bekomme x Quadratruthen;
also erhält A = x + 276 —
und C = x + 1112 —

Es ist daher 3x + 1388 = 8000;
folglich x = 2204 Quadratruthen für B,
mithin 2480 — — A
und 3316 — — C

36) Ein Maurer, zwölf Gesellen und vier Handlanger hatten für eine gewisse Zeit zusammen 61 fl 7 btz. 2 kr. Arbeitslohn erhalten; der Maurer erhielt täglich 7 btz. 2 kr. jeder Geselle 6 btz. 1 kr. und jeder Handlanger 5 btz. Wie viele Tage mußten sie für dieses Geld gearbeitet haben?

Auflösung.

Sie mögen x Tage gearbeitet haben;
also hat der Meister $\frac{1}{2}x$ ℔,
der Geselle $\frac{5}{12}x$ —, also 12 Gesellen $5x$,
der Handlanger $\frac{1}{3}x$ — erhalten, also 4 Handlanger $\frac{4x}{3}$.
Es ist daher $\frac{1}{2}x + 5x + \frac{4x}{3} = 61\frac{1}{2}$,
folglich $x = 9$ Tage.

37) Drei Maurer sollen eine Mauer aufführen. Der erste kann 8 Cubikfuß in 5 Tagen, der zweite 9 Cubikfuß in 4 Tagen und der dritte 10 Cubikfuß in 6 Tagen zu Stande bringen. Wie viel Zeit werden diese drei Maurer brauchen, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten, um 1655 Cubikfuß von dieser Mauer aufzuführen?

Auflösung.

Die Zeit, welche dazu erforderlich ist, sei $= x$,
so hat der erste $\frac{8x}{5}$ Cubikfuß verfertigt,
der zweite $\frac{9x}{4}$ — —
und der dritte $\frac{10x}{6}$ — —
Es ist daher $\frac{8x}{5} + \frac{9x}{4} + \frac{10x}{6} = 1655$,
folglich $x = 300$ Tage.

38) Aus a- und c löthigem Silber sollen m Mark b löthiges gemischt werden. Wie viel Mark muß man von jeder Sorte zur Mischung nehmen?

Auflösung.

Gesetzt, die Mischung fordert vom a löthigen Silber x Mark, so sind, da die Mischung aus m Mark bestehen soll, vom b löthigen $(m-x)$ Mark erforderlich.

Die x Mark a löthiges Silber enthalten ax Loth und die $(m-x)$ Mark c löthiges Silber enthalten $(m-x)c$ Loth Silber. Da die Mischung aus m Mark b löthigem Silber bestehen soll, so muß statt finden:

$$ax+(m-x)c = bm;$$

folglich $x = \frac{m(b-c)}{a-c}$

und $m-x = m - \frac{m(b-c)}{a-c} = \frac{m(a-b)}{a-c}$

Beispiele.

Ein Goldarbeiter hat 15 löthiges und 10 löthiges Silber; daraus will er 20 Mark 12 löthiges mischen. Wie viel von beiden Sorten muß er zusammenschmelzen?

Hier ist $a = 15$, $c = 10$, $b = 12$ und $m = 20$; also

$x = \frac{20(12-10)}{15-10} = 8$ Mark 15 löthiges und

$m-x = \frac{20(15-12)}{15-10} = 12$ Mark 10 löthiges Silber.

39) Zu n Mark a löthigem Silber soll so viel vom c löthigen zugesetzt werden, bis die Mischung b löthig wird. Wie viel Mark sind vom c löthigen Silber zu nehmen?

Auflösung.

Vom c löthigen Silber mögen noch x Mark zuzusetzen sein, damit die Mischung b löthig werde; also besteht die Mischung selbst aus $(n+x)$ Mark, und es ist

$$na+cx = (n+x)b,$$

folglich $x = \frac{n(a-b)}{b-c}$

Beispiele.

A) Wie viel 8 löthiges Silber muß man zu 7½ Mark 13 löthigem schmelzen, wenn der Gehalt auf 9 Loth gebracht werden soll?

Hier ist $n = 7\frac{1}{2}$, $a = 13$, $b = 8$ und $c = 8$; also

$x = \frac{7\frac{1}{2}(13-9)}{9-8} = 30$ Mark 8 löthiges Silber.

B) Jemand hat 20 Mark 15 löthiges Silber, und will so viel Kupfer zusetzen, daß die Mark nur 12 Loth an Silber enthalte. Wie viel Kupfer muß er zusetzen?

Hier ist $n = 20$, $a = 15$, $b = 12$ und $c = 0$; also

$$x = \frac{20(15-12)}{12} = 5 \text{ Mark Kupfer.}$$

40) Es hatte jemand seinen Kindern ein gewisses Vermögen hinterlassen, und in seinem Testamente festgesetzt, daß das erste Kind a Liv. und den nten Theil des Restes bekommen soll; hierauf das zweite 2a L. und noch den nten Theil des Restes, dann das dritte 3a L. und noch den nten Theil des Restes, und so jedes folgende Kind immer a L. mehr als das vorhergehende, und noch den nten Theil von dem, was dann noch unmittelbar übrig bleibt. Am Ende zeigte sich's, daß alle Kinder gleichviel erhalten hatten. Wie groß wär das hinterlassene Vermögen, und wie viel Kinder waren vorhanden?

Auflösung.

Das hinterlassene Vermögen sei $= x$; also bekömmt das erste Kind a und noch vom Reste $x-a$ den nten Theil. Der Antheil des ersten ist demnach $\frac{x-a}{n} + a = \frac{x-a+an}{n}$

Zieht man nun den Antheil des ersten von x ab, so bleibt $x - \frac{x-a+an}{n} = \frac{nx-x+a-an}{n}$ Hiervon bekömmt das zweite Kind 2a und $^1/_n$ des Restes, das ist: $2a + \frac{\frac{nx-x+a-an}{n} - 2a}{n} = \frac{nx-x+a-3an}{n^2} + 2a = \frac{nx-x+a-3an+2an^2}{n^2}$

Es ist demnach

$$\frac{x-a+an}{n} = \frac{nx-x+a-3an+2an^2}{n^2}; \text{ folglich}$$

$$x = an^2-2an+a = a(n-2n+1) = a(n-1)^2.$$

Substituirt man diesen Werth für x in $\frac{x-a+an}{n}$, so erhält man den Antheil eines jeden Kindes $=$
$\frac{a(n-1)^2-a+an}{n} = \frac{an^2-2an+a-a+an}{n} = \frac{an^2-an}{n} =$
$\frac{an(n-1)}{n} = a(n-1)$. Die Anzahl der Kinder ist demnach
$\frac{a(n-1)^2}{a(n-1)} = n-1$.

Beispiel.

Wie groß muß das Vermögen und die Anzahl der Kinder sein, wenn das erste Kind 100 L. nebst dem 10ten Theil des Restes, jedes folgende Kind aber 100 L. mehr nebst dem 10ten Theile des Restes haben sollte, und es sich am Ende fände, daß sie alle gleichviel bekommen hätten?

Nach der vorigen Aufgabe ist $a = 100$ und $n = 10$, also
$x = 100(10-1)^2 = 8100$ L.
und $10-1 = 9$ Kinder.

41) Aus einem gewissen Orte wird ein Kurier abgeschickt; nach seiner Abreise wird ihm ein anderer von einem rückwärts liegenden Orte nachgeschickt. Man fragt, in wie viel Zeit und an welchem Orte wird der zweite den ersten einholen*)?

Auflösung.

Der erste Kurier $=$ A.
Der zweite — $=$ B.
Die Geschwindigkeit von $A = c$
— — — $B = d$

*) Diese Aufgabe ist nur dann möglich, wenn vorausgesetzt wird, daß der zweite Kurier geschwinder gehe als der erste.

Die Entfernung, in welcher der B hinter A sich befindet . . . . $= e$.

Die Zeit, welche B später als A ausgeht $= f$.

Die Zeit, welche B bis zur Einholung des A braucht $= x$.

B geht mit der Geschwindigkeit d, während der Zeit x und läuft den Weg in dx Meilen (Stunden).

A geht mit der Geschwindigkeit c, und da er um f Zeit früher abgegangen ist, als B, so geht er während der Zeit $x+f$, läuft also einen Weg von $c(x+f)$ Meilen (Stunden).

Folglich hat man

$$c(x+f) = dx - e$$
$$cx + cf = dx - e$$
$$e + cf = dx - cx$$
$$e + cf = (d-c)x$$
$$\frac{e+cf}{d-c} = x$$
$$\frac{d(e+cf)}{d-c} = dx$$

Beispiel.

Einem Kurier, der vor 2 Tagen von Leipzig nach Paris abgegangen ist und der täglich 12½ fr. Meilen macht, wird aus Berlin, welches 36 fr. Meilen hinter Leipzig liegt, ein anderer nachgeschickt, der täglich 20 fr. Meilen macht; in wie viel Zeit wird der zweite Kurier den ersten einholen?

Hier ist $e = 35$, $c = 12\frac{1}{2}$, $f = 2$ und $d = 20$; also

$$x = \frac{35 + 12\frac{1}{2} \times 2}{20 - 12\frac{1}{2}} = \frac{35 + 25}{20 - 12\frac{1}{2}} = \frac{60}{7\frac{1}{2}} = 8 \text{ Tage}$$

und $dx = 20 \times 8 = 160$ fr. Meilen,

folglich $A = 8 + 2 = 10$ Tage

und $160 - 35 = 125$ fr. Meilen.

42) Wenn alles wie in der vorigen Aufgabe bleibt, nur daß B früher ausgeht als A, in welcher Zeit würden sie zusammen treffen?

Auflösung.

In diesem Falle wird f negativ, und es ist

$$x = \frac{e-cf}{d-c}$$

$$\text{und } dx = \frac{d(e-cf)}{d-c}$$

Beispiel.

Gesetzt, der zweite Kurier gehe einen Tag früher von Berlin ab, als der erste von Leipzig: in welcher Zeit wird der zweite den ersten einholen?

Hier ist $e = 35$, $c = 12\frac{1}{2}$, $f = 1$ und $d = 20$; also

$$x = \frac{35-12\frac{1}{2}\times 1}{20-12\frac{1}{2}} = \frac{22\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}} = 3 \text{ Tage}$$

und $dx = 20 \times 3 = 60$ fr. Meilen,
folglich $A = 3-1 = 2$ Tage
und $60-35 = 25$ fr. Meilen.

43) In wie viel Zeit aber werden sie sich begegnen, wenn beide zugleich ausgehen, und A nur einen Theil des Weges voraus hat?

Auflösung.

In diesem Falle wird $f = 0$, und es ist

$$x = \frac{e}{d-c}$$

$$\text{und } dx = \frac{de}{d-c}$$

Beispiel.

Gesetzt, der erste gehe von Leipzig und der zweite von Berlin zugleich ab, in welcher Zeit wird der zweite den ersten einholen?

Hier ist $e' = 35$, $c = 12\frac{1}{2}$ und $d = 20$; also

$$x = \frac{35}{20 - 12\frac{1}{2}} = \frac{35}{7\frac{1}{2}} = 4\frac{2}{3} \text{ Tage}$$

und $dx = 20 \times 4\frac{2}{3} = 93\frac{1}{3}$ fr. Meilen,

folglich $A = 4\frac{2}{3}$ Tage,

und $93\frac{1}{3} - 35 = 58\frac{1}{3}$ fr. Meilen.

44) In welcher Zeit aber werden sie sich begegnen, wenn beide vom gleichen Orte ausgehen, und A nur eine gewisse Zeit voraus hat?

Auflösung.

In diesem Falle wird $e = 0$, und es ist

$$x = \frac{cf}{d - c}$$

$$\text{und } dx = \frac{dcf}{d - c}$$

Beispiel.

Gesetzt, der erste gehe drei Tage früher als der zweite von Leipzig ab, in welcher Zeit wird der zweite den ersten einholen?

Hier ist $c = 12\frac{1}{2}$, $f = 3$ und $d = 20$; also

$$x = \frac{12\frac{1}{2} \times 3}{20 - 12\frac{1}{2}} = \frac{37\frac{1}{2}}{7\frac{1}{2}} = 5 \text{ Tage}$$

und $dx = 20 \times 5 = 100$ fr. Meilen,

folglich $A = 5 + 3 = 8$ Tage

und 100 fr. Meilen.

45) Wenn aber die beiden Kuriere, anstatt hinter einander, gegen einander kommen würden, und A früher als B abgeht: in welcher Zeit würden sie zusammen treffen?

Auflösung.

In diesem Fall wird c negativ, und es ist

$$x = \frac{e-cf}{d+c}$$

$$\text{und } dx = \frac{d(e-cf)}{d+c}$$

Beispiel.

Gesetzt, der erste gehe von Paris und der zweite 4 Tage später von Leipzig ab, in welcher Zeit können sie zusammen treffen, wenn die Entfernung der beiden Städten 196 fr. Meilen beträgt?

Hier ist $e = 196$, $c = 12\frac{1}{2}$, $f = 4$ und $d = 20$; also

$$x = \frac{196 - 12\frac{1}{2} \times 4}{20 + 12\frac{1}{2}} = \frac{196-50}{20+12\frac{1}{2}} = \frac{146}{32\frac{1}{2}} =$$

$4\frac{32}{65}$ Tage

und $dx = 20 \times 4\frac{32}{65} = 89\frac{11}{13}$ fr. Meilen,
folglich $A = 4\frac{32}{65} + 4 = 8\frac{32}{65}$ Tage
und $196 - 89\frac{11}{13} = 106\frac{2}{13}$ fr. Meilen.

46) Wenn aber die beiden Kuriere zugleich abgehen: in welcher Zeit werden sie sich begegnen?

Auflösung.

In diesem Falle wird $f = 0$, und es ist

$$x = \frac{e}{d+c}$$

$$\text{und } dx = \frac{de}{d+c}$$

Beispiel.

Gesetzt, die beiden Kuriere gehen zugleich ab, in welcher Zeit werden sie einander begegnen?

Hier ist $e = 196$, $c = 12\frac{1}{2}$ und $d = 20$; also

$$x = \frac{196}{20+12\frac{1}{2}} = \frac{196}{32\frac{1}{2}} = 6\frac{2}{65} \text{ Tage}$$

und $dx = 20 \times 6\frac{2}{65} = 120\frac{8}{13}$ fr. Meilen,

folglich $A = 6\frac{2}{65}$ Tage

und $196 - 120\frac{8}{13} = 75\frac{5}{13}$ fr. Meilen.

47) Ein Windhund verfolgt einen Hasen. Ehe der Hund zu laufen anfängt, hat der Hase schon 50 Sprünge gemacht, und so viel beträgt ihre anfängliche Entfernung. Wenn nun der Hase in eben der Zeit 6 Sprünge macht, in welcher der Hund 5 Sprünge thut, und in Hinsicht auf die Größe 9 Hasensprünge gleich 7 Hundesprüngen gerechnet werden: wie viel Sprünge wird der Hase noch machen können, bis der Hund ihn einholt?

Auflösung.

Man setze die Sprünge, welche der Hase noch machen kann, bis der Hund ihn einholt, $= x$.

Nach den Bedingungen der Aufgabe hat man folgende zwei Proportionen:

1) in Hinsicht der Geschwindigkeit

6 Hasensprünge : 5 Hundesprünge $= x$ Hasensprünge : $\frac{5x}{6}$ Hundssprünge.

2) in Hinsicht der Größe

7 Hundesprünge : 9 Hasensprünge $= \frac{5x}{6}$ Hundesprünge : $\frac{9 \times 5x}{7 \times 6}$ Hasensprünge.

Der Hund macht demnach in Rücksicht auf die Größe der Sprünge $\frac{45x}{42} = \frac{15x}{14}$ Hasensprünge. Folglich hat man

$$\frac{15x}{14} = x + 50$$

$$x = 700 \text{ Sprünge.}$$

48) Ein Wasserbehälter faßt a Cubikfuß. Wie lange müssen die demselben Wasser zuführenden Röhren geöffnet bleiben, wenn die erste Röhre m Cubikfuß in n Sekunden, die zweite m' Cubikfuß in n' Sekunden und die dritte m'' Cubikfuß in n'' Sekunden in den Behälter einläßt?

Auflösung.

Die erste Röhre giebt in einer Sekunde m/n Cubikfuß.
— zweite — — — — — m'/n' —
— dritte — — — — — m''/n'' —

Die Zeit, in welcher alle drei Röhren geöffnet bleiben müssen, um a Cubikfuß Wasser zu füllen, betrage x Sekunden; folglich

$$m/n\,x + m'/n'\,x + m''/n''\,x = a$$
$$x(mn'n''+m'nn''+m''nn') = ann'n''$$
$$x = \frac{ann'n''}{mn'n''+m'nn''+m''nn'} \text{ Sekunden.}$$

49) In einen Behälter fließen durch eine Oeffnung in n Sekunden m Cubikfuß ein und durch eine zweite Oeffnung in n' Sekunden m' Cubikfuß ab. Wenn nun die das Wasser zu- und abführenden Röhren gleichzeitig geöffnet werden, und der Behälter zur Zeit der Oeffnung a Cubikfuß enthält: nach welcher Zeit wird das Wasser des Behälters ausgeflossen sein, vorausgesetzt, daß mehr ab- als zufließt?

Auflösung.

Dem Behälter fließen in einer Sekunde m/n Cubikfuß Wasser zu und m'/n' Cubikfuß Wasser ab. Die Zeit, nach welcher das im Behälter befindliche Wasser mit dem, welches in derselben Zeit noch dazu kömmt, durch die andere Oeffnung abfließt, betrage x Sekunden; so ist

$$a + m/n\,x = m'/n'\,x$$
$$ann' + mn'x = m'nx$$
$$x = \frac{ann'}{m'n - mn'} \text{ Sekunden.}$$

50) Ein Wasserbehälter ist leer. Wenn nun durch eine Oeffnung demselben m Cubikfuß in n Sekunden zufließen, durch eine andere Oeffnung ihm in n' Sekunden m' Cubikfuß entzogen werden, und die Menge des einfließenden Wassers größer als die des abfließenden ist: nach welcher Zeit werden sich dann a Cubikfuß im Behälter gesammelt haben?

Auflösung.

Durch die eine Röhre fließen in einer Sekunde m/n Cubikfuß Wasser zu und durch die andere in einer Sekunde m'/n' Cubikfuß Wasser ab. Die Zeit, nach welcher sich im Behälter a Cubikfuß Wasser gesammelt haben, betrage x Sekunden; so ist

$$m/_n x - m'/_{n'} x = a.$$

$$mn'x - m'nx = ann'$$

$$x = \frac{ann'}{mn' - m'n} \text{ Sekunden.}$$

Zweiter Abschnitt.

Aufgaben vom ersten Grade mit mehreren unbekannten Größen.

1) Es werden zwei Zahlen gesucht, deren Summe 70 und deren Differenz 16 ist. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Die beiden Zahlen mögen x und y sein, so ist

$$\begin{array}{rrcl} \text{I)} & x+y & = & 70 \\ \text{II)} & x-y & = & 16 \\ \hline \text{I+II)} & 2x & = & 86 \\ & x & = & 43 \\ \hline \text{I—II)} & 2y & = & 54 \\ & y & = & 27 \end{array}$$

2) Es werden zwei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht: Wenn man die eine mit 2, die andere mit 5 multiplizirt, und beide Produkte addirt, soll die Summe 31 sein; multiplizirt man hingegen die erste mit 7, die zweite mit 4, und addirt beide Produkte zusammen, so soll man 68 bekommen. Welche Zahlen sind es?

Auflösung.

Die beiden Zahlen mögen x und y sein; also ist

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & 2x+5y = 31 \\ \text{II)} & 7x+4y = 68 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 4\times\text{I} = \text{III)} & 8x+20y = 124 \\ 5\times\text{II} = \text{IV)} & 35+20y = 340 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{IV—III)} & 27x = 216 \\ & x = 8 \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & 16+5y = 31 \\ & 5y = 15 \\ & y = 3 \end{array}$$

3) Es giebt einen Bruch, der so beschaffen ist, daß wenn zum Zähler 1 addirt wird, der Werth desselben = $1/3$, und wenn zum Nenner 1 addirt wird, der Werth desselben = $1/4$ ist. Welcher Bruch ist es?

Auflösung.

Der Zähler des gesuchten Bruches sei = x und der Nenner = y; also ist

$$\text{I)} \quad \frac{x+1}{y} = 1/3$$

$$\text{II)} \quad \frac{x}{y+1} = 1/4$$

$$\begin{array}{rl} \text{I)} & 3x-y = -3 \\ \text{II)} & 4x-y = 1 \end{array}$$

$$\text{II—I)} \quad x = 4$$

$$\begin{array}{rl} \text{II)} & 16-y = 1 \\ & y = 15 \end{array}$$

Der gesuchte Bruch ist daher $4/15$.

4) Es wird ein Bruch gesucht, der so beschaffen ist, daß er sich, wenn vom Zähler und vom Nenner 3 subtrahirt, in $1/4$, und wenn zum Zähler und zum Nenner 5 addirt wird, in $1/2$ verwandelt. Welcher Bruch ist es?

Auflösung.

Der Zähler des gesuchten Bruches sei = x und der Nenner = y; also ist

$$\text{I)}\quad \frac{x-3}{y-3} = \frac{1}{4}$$

$$\text{II)}\quad \frac{x+5}{y+5} = \frac{1}{2}$$

$$\text{I)}\quad 4x-y = 9$$

$$\text{II)}\quad 2x-y = -5$$

$$\text{I—II)}\quad 2x = 14$$

$$x = 7$$

$$\text{I)}\quad 28-y = 9$$

$$y = 19$$

Der gesuchte Bruch ist daher $\frac{7}{19}$.

5) Es wurde jemand nach seinem, seines Vaters und seines Großvaters Alter gefragt. Er antwortete: Mein und meines Vaters Alter beträgt zusammen 56 Jahre, das meines Vaters und seines Großvaters zusammen 100, mein und meines Großvaters Alter zusammen 80 Jahre. Wie alt ist nun jeder?

Auflösung.

Das Alter des Sohnes sei = x, das Alter des Vaters = y und das Alter des Großvaters = z, so ist

$$\text{I)}\quad x+y = 56$$

$$\text{II)}\quad y+z = 100$$

$$\text{III)}\quad x+z = 80$$

$$\text{I+II+III = IV)}\quad 2(x+y+z) = 236$$

$$x+y+z = 118$$

$$\text{IV—I)}\quad z = 62 \text{ Jahre.}$$

$$\text{IV—II)}\quad x = 18 \text{ —}$$

$$\text{IV—III)}\quad y = 38 \text{ —}$$

6) A, B, C sind zusammen 2190 L. schuldig; keiner kann diese Summe allein bezahlen. Wenn sie sich aber vereinigen, so kann es etwa auf nachstehende Art geschehen: wenn B $\frac{3}{7}$ seines Vermögens zum ganzen Vermögen des A, oder C $\frac{5}{9}$ seines Vermögens zu dem des B, oder A $\frac{2}{3}$ zu dem des C legt. Wie viel besitzt demnach ein jeder?

Auflösung.

A besitze x L., B y L. und C z L.; also ist

$$\text{I)}\quad x + \frac{3y}{7} = 2190$$
$$\text{II)}\quad y + \frac{5z}{9} = 2190$$
$$\text{III)}\quad z + \frac{x}{3} = 2190$$

$$\text{I} - \frac{3}{7} \times \text{II} = \text{IV)}\quad x - \frac{5z}{21} = \frac{8760}{7}$$

$$\text{III} - \frac{2}{3} \times \text{IV)}\quad z = 1170 \text{ L.}$$
$$\text{II)}\quad y = 1540 \text{ —}$$
$$\text{III)}\quad x = 1530 \text{ —}$$

7) A, B, C vergleichen ihr Vermögen. A sagt zu B: Gieb mir 700 Gl. von deinem Gelde, so habe ich zweimal so viel als du behältst. B sagt zu C: Gieb mir 1400 Gl., so habe ich dreimal so viel als du behältst. C sagt zu A: Gieb mir 420 Gl., so habe ich fünfmal so viel als du behältst. Wie viel hat jeder?

Auflösung.

A habe x Gl., B y Gl. und C z Gl.; so ist

$$\text{I)}\quad x + 700 = 2(y - 700)$$
$$\text{II)}\quad y + 1400 = 3(z - 1400)$$
$$\text{III)}\quad z + 420 = 5(x - 420)$$

$$\text{I)}\quad x - 2y = -2100$$
$$\text{II)}\quad y - 3z = -5600$$
$$\text{III)}\quad z - 5x = -2520$$

$$\text{I} + 2 \times \text{II} = \text{IV)}\quad x - 6z = -13300$$

$$\text{IV} + 6 \times \text{III)}\quad x = 980 \text{ Gl.}$$
$$\text{I)}\quad y = 1540 \text{ —}$$
$$\text{III)}\quad z = 2380 \text{ —}$$

8) Ein Weinhändler hat zweierlei Weine. Vermischt er a Maaß des bessern mit b Maaß des schlechtern, so kann er die Maaß für c Groschen verkaufen. Vermischt er aber f Maaß des bessern mit g Maaß des schlechtern, so kann er die Maaß für h Groschen verkaufen. Was kostet die Maaß einer jeden Sorte?

Auflösung.

Die Maaß des bessern koste x Groschen und die Maaß des schlechtern y Groschen. Vermischt er nun a Maaß des bessern mit b Maaß des schlechtern Weins, so kann er diese a+b Maaß, zu c Groschen die Maaß verkaufen. Es ist daher

$$\text{I)}\quad ax+by = (a+b)c$$

Vermischt er aber f Maaß des bessern mit g Maaß des schlechtern, so ist

$$\text{II)}\quad fx+gy = (f+g)h$$

$$f\times\text{I}-a\times\text{II})\quad (bf-ag)y = (a+b)cf-(f+g)ah$$

$$\text{also}\quad y = \frac{(a+b)cf-(f+g)ah}{bf-ag}$$

$$g\times\text{I}-b\times\text{II})\quad (ag-bf)x = (a+b)cg-(f+g)bh$$

$$\text{also}\quad x = \frac{(a+b)cg-(f+g)bg}{ag-bf}$$

9) Ein gegebenes Stück Metall, das p ℔ wiegt, verliert im Wasser a ℔. Dieses Stück ist aber aus zwei andern Metallen, die A und B heißen mögen, zusammengesetzt, von denen bekannt ist, daß m ℔ von A im Wasser b ℔, und n ℔ von B im Wasser c ℔ verlieren. Wie viel von jedem Metalle befindet sich in dem gegebenen Stücke?

Auflösung.

Die Mischung enthalte x ℔ von dem Metalle A und y ℔ von dem Metalle B. Es ist daher

$$\text{I)}\quad x+y = p.$$

Da nun ferner m ℔ von A im Wasser b ℔ verlieren, so verlieren x ℔ $^{bx}/_{m}$ ℔; n ℔ von B verlieren im Wasser c ℔, folglich verlieren y ℔ im Wasser $^{cy}/_{n}$ ℔. Es verliert also die Mischung von x ℔ + y ℔ im Wasser $^{bx}/_{m} + {}^{cy}/_{n}$. Nun verliert aber, nach der Aufgabe, diese Mischung im Wasser a ℔. Es ist daher

$$\text{II)}\quad \frac{bx}{m} + \frac{cy}{n} = a$$

$$bnx + cmy = amn$$

$$\text{II}-bn\times\text{I)}\quad y = \frac{n(bp-am)}{bn-cm} = \frac{n(am-bp)}{cm-bn}$$

$$\text{II}-cm\times\text{I)}\quad x = \frac{m(an-cp)}{bn-cm} = \frac{m(cp-an)}{cm-bn}$$

10) $17\frac{1}{2}$ Danziger und 19 Berliner Fuß machen zusammen so viel als $34\frac{3}{4}$ Rheinländische Fuß; ferner 5 Danziger und $9\frac{1}{2}$ Berliner Fuß so viel als $13\frac{53}{56}$ Rheinländische Fuß. Wie verhält sich nach diesen Angaben der Danziger und der Berliner Fuß zum Rheinländischen? Wie der Danziger zum Berliner Fuß?

Auflösung.

Ein Danziger Fuß sei = x Rheinl. und ein Berliner = y Rheinl., so sind $17\frac{1}{2}$ Danz. = $17\frac{1}{2}x$ Rheinl. und 19 Berl. = 19y Rheinl. Es ist daher

$$\text{I)}\quad 17\tfrac{1}{2}x + 19y = 34\tfrac{3}{4}\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

$$\text{II)}\quad 5x + 9\tfrac{1}{2}y = 13\tfrac{53}{56}\ \text{— —}$$

$$7\times\text{II}-2\times\text{I)}\quad y = \tfrac{75}{76}\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Es verhält sich also der Berliner zum Rheinländischen Fuß, wie 75 : 76.

$$\text{I}-2\times\text{II)}\quad x = \tfrac{32}{45}\ \text{Rheinl. Fuß.}$$

Folglich verhält sich der Danziger Fuß zum Rheinländischen, wie 32 : 35.

Nun ist

$$\begin{array}{l} \text{Berlin.} : \text{Rheinl.} = 75 : 76 \\ \text{Rheinl.} : \text{Danz.} = 35 : 32 \end{array}$$

folglich Berlin. : Danz. $= 75 \times 35 : 76 \times 32 =$ $2625 : 2432$.

11) 15 Schlesische und 33 Leipziger Ellen machen zusammen so viel als $39\frac{1}{2}$ Brabanter Ellen; ferner 24 Schlesische und 55 Leipziger Ellen zusammen so viel als 65 Brabanter Ellen. Wie verhält sich nach diesen Angaben die Schlesische und die Leipziger Elle zur Brabanter? Wie verhält sich ferner die Schlesische zur Leipziger Elle?

Auflösung.

Eine Schlesische Elle sei $= x$ Brabant. Ellen und eine Leipziger sei $= y$ Brab. Ellen, so sind 15 Schlesische $= 15x$ Brab. und 33 Leipz. $= 33y$ Brab. Es ist also

I) $15x + 33y = 39\frac{1}{2}$ Brab. Ellen.
II) $24x + 55y = 65$ — —

$5 \times \text{II} - 8 \times \text{I}$) $y = \frac{9}{11}$ Brab. Ellen.

Es verhält sich also die Leipziger zur Brab. Elle, wie $9 : 11$.

$5 \times \text{I} - 3 \times \text{II}$) $x = \frac{5}{6}$ Brab. Ellen.

Folglich verhält sich die Schlesische zur Brab. Elle, wie $5 : 6$.

Nun ist

$$\begin{array}{l} \text{Leipz. Brab.} = 9 : 11 \\ \text{Brab. Schles.} = 6 : 5 \end{array}$$

folglich Leipz. : Schles. $= 6 \times 9 : 11 \times 5 = 54 : 55$

12) Jemand hat drei Magazine, deren jedes dreierlei Getreide enthält, nämlich Weizen, Roggen und Gerste. Das erste Magazin enthält 8 Mütt Weizen, 3 Mütt Roggen und 5 Mütt Gerste; das zweite 3 Mütt Weizen, 10 Mütt

Roggen und 7 Mütt Gerste; das dritte 6 Mütt Weizen, 9 Mütt Roggen und 13 Mütt Gerste. Der Werth des ersten Magazins ist 734 L., der Werth des zweiten 812 L. und der Werth des dritten 1130 L. Wie hoch wurde der Mütt von jeder Getreideart gerechnet?

Auflösung.

Der Mütt Weizen koste x L., der Mütt Roggen y L, und der Mütt Gerste z L.; also ist

$$\begin{array}{rrcl}
\text{I)} & 8x+3y+5z & = & 734 \\
\text{II)} & 3y+10y+7z & = & 812 \\
\text{III)} & 6x+9y+13z & = & 1130 \\
\hline
2\times\text{II}-\text{III} = \text{IV)} & 11y+z & = & 494 \\
4\times\text{III}-3\times\text{I} = \text{V)} & 27y+37z & = & 2318 \\
\hline
37\times\text{IV}-\text{V)} & y & = & 42 \text{ L.} \\
\text{IV)} & z & = & 32 \text{ L.} \\
\text{I)} & x & = & 56 \text{ L.}
\end{array}$$

13) A, B, C kaufen Kaffee, Zucker und Thee zu denselben Preisen. A bezahlt 13 Gl. 1 bz. für $7\frac{2}{3}$ Pfund Kaffee, 3 Pfund Zucker und $2\frac{1}{4}$ Pfund Thee; B bezahlt 18 Gl. 9 bz. für 9 Pfund Kaffee, 7 Pfund Zucker und 3 Pfund Thee; C bezahlt 11 Gl. 11 bz. für 2 Pfund Kaffee, $5\frac{1}{2}$ Pfund Zucker und 4 Pfund Thee. Was kostet das Pfund von jedem?

Auflösung.

Das Pfund Kaffee koste x bz., das Pfund Zucker y bz. und das Pfund Thee z bz.; also ist

$$
\begin{aligned}
\text{I)}\quad & 7\tfrac{2}{3}x+3y+2\tfrac{1}{4}z = 196\\
\text{II)}\quad & 9x+7y+3z = 279\\
\text{III)}\quad & 2x+5\tfrac{1}{2}y+4z = 176
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
4\times\text{II}-3\times\text{III}=\text{IV)}\quad & 30x+11\tfrac{1}{2}y = 588\\
3\times\text{II}-4\times\text{I} = \text{V)}\quad & -3\tfrac{2}{3}x+9y = 53
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
9\times\text{IV}-11\tfrac{1}{2}\times\text{V)}\quad & x = 15 \text{ bz.}\\
\text{IV)}\quad & y = 12 \text{ bz.}\\
\text{III)}\quad & z = 20 \text{ bz.}
\end{aligned}
$$

14) Drei Maurer A, B, C sollen eine Mauer aufführen. A und B würden gemeinschaftlich diese Mauer in 12 Tagen vollenden; B und C würden erst in 20 Tagen damit fertig werden; A und C aber werden in 15 Tagen fertig. Wie viel Zeit wird jeder einzeln dazu brauchen? Und in welcher Zeit werden sie damit zu Stande kommen, wenn sie alle drei gemeinschaftlich arbeiten?

Auflösung.

Man setze, A mache die ganze Arbeit in x Tagen; B in y Tagen; und C in z Tagen fertig: so macht A in einem Tage $1/x$ der Arbeit; B in einem Tagen $1/y$ der Arbeit; und C in einem Tage $1/z$ der Arbeit. Es machen daher A und B zusammen in einem Tage $1/x + 1/y$ der Arbeit fertig. Da nun A und B zusammen die Arbeit in 12 Tagen vollenden, so machen sie in einem Tage $1/12$ der Arbeit. Es ist demnach

$$
\begin{aligned}
\text{I)}\quad & 1/x + 1/y = 1/12\\
\text{und ebenso II)}\quad & 1/y + 1/z = 1/20\\
\text{III)}\quad & 1/x + 1/z = 1/15
\end{aligned}
$$

$$
\text{I}-\text{II} = \text{IV)}\quad 1/x - 1/z = 1/30
$$

$$
\begin{aligned}
\text{III}+\text{IV)}\quad & x = 20 \text{ Tage}\\
\text{und also}\quad & y = 30 \text{ Tage,}\\
& z = 60 \text{ Tage.}
\end{aligned}
$$

Da nun ferner A, B und C zusammen in einem Tage $\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}=\frac{1}{10}$ der Arbeit fertig machen, so vollenden sie zusammen die ganze Arbeit in 10 Tagen.

15) Jemand hat drei Stücke Metall, deren jedes aus Gold, Silber und Kupfer besteht. Das erste Stück enthält 5 Loth Gold, 15 Loth Silber und 30 Loth Kupfer, das zweite 20 Loth Gold, 28 Loth Silber und 48 Loth Kupfer, und das dritte 12 Loth Gold 39 Loth Silber und 24 Loth Kupfer. Nun will er von jedem etwas hinweg nehmen, und alles zu einer Masse schmelzen, um dadurch eine Composition von 10 Loth Gold, 23 Loth Silber und 26 Loth Kupfer hervorzubringen. Wie viel muß er von jedem Stücke dazu nehmen?

Auflösung.

Von dem ersten Stück mag er x Loth, vom zweiten y Loth und vom dritten z Loth genommen haben. Da nun im ersten Stücke das Gold, das Silber und das Kupfer nach dem Verhältnisse von 5 : 15 : 30 oder 1 : 3 : 6 enthalten ist, so muß x in drei Theile, welche sich wie 1 : 3 : 6 verhalten, zerfällt werden. Man dividire daher x durch $1+3+6=10$, und multiplizire diesen Bruch nach und nach mit 1, 3 und 6, so erhält man für die drei Theile, woraus x zusammengesetzt ist, $x/10$ Loth Gold, $3x/10$ Loth Silber und $3x/5$ Loth Kupfer. Im zweiten Stücke ist das Verhältniß des Goldes, Silbers und Kupfers durch die Zahlen 20, 28, 48 oder 5, 7, 12 ausgedrückt. Man muß daher y nach diesen Verhältnissen theilen. Es ist also y aus $5y/24$ Loth Gold, $7y/24$ Loth Silber und $y/2$ Loth Kupfer zusammengesetzt. Auf eine ähnliche Art findet man, daß in z $4z/25$ Loth Gold, $13z/25$ Loth Silber und $8z/25$ Loth Kupfer enthalten ist. Es ist demnach in den drei hinweggenommenen Stücken Metall

$$\frac{x}{10} + \frac{5y}{24} + \frac{4z}{25} \text{ Loth Gold,}$$

$$\frac{3x}{10} + \frac{7y}{24} + \frac{13z}{25} \text{ Loth Silber,}$$

$$\frac{3x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{8z}{28} \text{ Loth Kupfer}$$

enthalten. Da nun nach der Aufgabe in der Composition 10 Loth Gold enthalten sein sollen, so ist

$$\text{I)} \quad \frac{x}{10} + \frac{5y}{24} + \frac{4z}{25} = 10$$

oder $60x + 125y + 96z = 6000.$

Ferner sollen in der Composition 23 Loth Silber enthalten sein. Es ist also

$$\text{II)} \quad \frac{3x}{10} + \frac{7y}{24} + \frac{13z}{25} = 23$$

oder $180x + 175y + 312z = 13800.$

Endlich soll die Composition 26 Loth Kupfer enthalten. Es ist also

$$\text{III)} \quad \frac{3x}{5} + \frac{y}{2} + \frac{8z}{25} = 26$$

oder $30x + 25y + 16z = 1300$

$\text{I} - 2 \times \text{III} = \text{IV)} \quad 75y + 64z = 3400$
$3 \times \text{I} - \text{II} = \text{V)} \quad 200y - 24z = 4200$

$3 \times \text{IV} + 8 \times \text{V)} \quad y = 24$ Loth
und also $x = 10$ Loth,
$z = 25$ Loth.

16) Ein Pächter verkaufte das erste Mal 4 Mütt Hafer, 8 Mütt Gerste, 6 Mütt Roggen und 2 Mütt Waizen zusammen für 860 Gl., das zweite Mal 3 Mütt Hafer, 3 Mütt Gerste, 1 Mütt Roggen und 10 Mütt Waizen für 860 Gl., das dritte Mal 6 Mütt Hafer, 5 Mütt Gerste, 5 Mütt Rog-

gen und 4 Mütt Waizen für 870 Gl., und das vierte Mal 2 Mütt Hafer, 2 Mütt Gerste, 3 Mütt Roggen und 8 Mütt Waizen für 770 Gl. Was kostet der Mütt jeder Getreideart?

Auflösung.

Der Mütt Hafer koste x Gl., der Mütt Roggen z Gl., und der Mütt Waizen w Gl.; so ist

$$\text{I)}\quad 4x+8y+6z+2w=860$$
$$\text{II)}\quad 3x+3y+z+10w=860$$
$$\text{III)}\quad 6x+5y+5z+4w=870$$
$$\text{IV)}\quad 2x+2y+3z+8w=770$$

$$\text{I}=\text{V)}\quad x=\frac{860-8y-6z-2w}{4}$$
$$x=215-2y-1\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}w$$

$$\text{V in II}=\text{VI)}\quad 3(215-2y-1\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}w)+3y+z+10w=860$$
$$645-6y-4\tfrac{1}{2}z-1\tfrac{1}{2}w+3y+z+10w=860$$
$$-3y-3\tfrac{1}{2}z+8\tfrac{1}{2}w=215.$$

$$\text{V in III}=\text{VII)}\quad 6(215-2y-1\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}w)+5y+5z$$
$$+4w=870$$
$$1290-12y-9z-3w+5y+5z+4w=870$$
$$420-7y-4z+w=0$$
$$420-7y+4z-w$$

$$\text{V in IV}=\text{VIII)}\quad 2(215-2y-1\tfrac{1}{2}z-\tfrac{1}{2}w)+2y+3z$$
$$+8w=770$$
$$430-4y-3z-w+2y+3z+8w=770$$
$$-2y+7w=340$$

$$\text{VI}=\text{IX)}\quad -3y-3\tfrac{1}{2}z+8\tfrac{1}{2}w=215$$
$$-6y-7z+17w=430$$
$$17w-7z-430=6y$$
$$y=\frac{17w-7z-430}{6}$$

IX in VII = X) $420 = 7\left(\frac{17w-7z-430}{6}\right)+4z-w$

$$420 = \frac{119w-49z-3010}{6}+4z-w$$

$$2520 = 119w-49z-3010+24z-6w$$

$$5530 = 113w-25z$$

IX in VIII = XI) $-2\left(\frac{17w-7z-430}{6}\right)+7w=340$

$$\frac{-(17w-7z-430)}{3}+7w=340$$

$$-17w+7z+430+21w = 1020$$

$$4w+7z = 590$$

X = XII) $5530=113w-25$

$$25z=113w-6530$$

$$z=\frac{113w-5530}{25}$$

XII in XI = XIII) $4w+7\left(\frac{113w-5530}{25}\right) = 590$

$$100w+791w-38710 = 14750$$

$$891w = 53460$$

$w = 60$ Gl.

XIII in XII = XIV) $z = \frac{113\times60-5530}{25} = 50$ Gl.

XIII und XIV in IX = XV) $y=\frac{(17\times60)-(7\times50)-430}{6}$

$= 40$ Gl.

XIII, XIV und XV in V = XVI) $x =$
$215-(2\times40)-(1\tfrac{1}{2}\times50)-(\tfrac{1}{2}\times60) = 30$ Gl.

Dritter Abschnitt.

Von der Zinsrechnung.

I.

Die einfache Zinsrechnung.

1.

Ohne Zeit.

Bezeichnet man

durch c das Capital,
— z den Zins,
— p den Zinsfuß;

so kann man, wenn zwei von diesen Größen gegeben sind, den Werth der dritten aus folgenden Formeln finden, nämlich

das Capital und der Zins $= c+z$

also $z = \frac{cp}{100}$ und $c+z = \frac{c(100+p)}{100}$

$p = \frac{100z}{c}$ oder $\frac{100[(c+z)-c]}{c}$

$c = \frac{100z}{p}$ oder $\frac{100(c+z)}{100+p}$

Beispiele.

1) Wie viel Gl. Zins geben 3500 Gl. zu 4 Prozent?

Auflösung.

$$z = \frac{cp}{100} = \frac{3500 \times 4}{100} = \frac{14000}{100} = 140 \text{ Gl.}$$

2) Zu wie viel Prozent muß ein Capital von 2400 Gl. ausgeliehen werden, wenn es jährlich 120 Gl. Zinsen tragen soll?

Auflösung.

$$p = \frac{100z}{c} = \frac{100 \times 120}{2400} = \frac{12000}{2400} = 5 \text{ Prozent.}$$

3) Wie groß muß das Capital sein, welches zu 6 Prozent ausgeliehen, jährlich 180 Gl. Zins trägt?

Auflösung.

$$c = \frac{100z}{p} = \frac{100 \times 180}{6} = \frac{18000}{6} = 3000 \text{ Gl.}$$

4) Ein Capital vom 4000 Gl. ist zu 4 Prozent ausgeliehen; wie hoch wird das Capital und der Zins nach Verlauf eines Jahres sein?

Auflösung.

$$c+z = \frac{c(100+p)}{100} = \frac{4000(100+4)}{100} = \frac{4000 \times 104}{100}$$
$$= \frac{416000}{100} = 4160 \text{ Gl.}$$

5) Zu wie viel Prozent muß man 6000 Gl. ausleihen, wenn es nach Verfluß eines Jahres 6300 Gl. Capital und Zins tragen soll?

Auflösung.

$$\frac{100[(c+z)-c]}{c} = \frac{100(6300-6000)}{6000} = \frac{100 \times 300}{6000}$$
$$= \frac{30000}{6000} = 5 \text{ Prozent.}$$

6) Ein zu 6 Prozent ausgeliehenes Capital giebt nach Verlauf eines Jahres an Capital und Zins 3816 Gl.; wie groß war das verliehene Capital?

Auflösung.

$$c = \frac{109(c+z)}{100+p} = \frac{100 \times 3816}{100+6} = \frac{381600}{106}$$
$= 3600$ Gulden.

2.

Mit Zeit.

Bezeichnet man

durch c das Capital,
— z den Zins,
— p den Zinsfuß,
— t die Zeit;

so kann man, wenn drei von diesen Größen gegeben sind, den Werth der vierten aus folgenden Formeln finden: nämlich

das Capital und der Zins $= c+z$;
also

$$z = \frac{cpt}{100} \text{ und } c+z = \frac{c(100+pt)}{100}$$

$$c = \frac{100z}{pt} \text{ oder } \frac{100\,(c+z)}{100+pt}$$

$$p = \frac{100z}{ct} \text{ oder } \frac{100[(c+z)-c]}{ct}$$

$$t = \frac{100z}{cp} \text{ oder } \frac{100[(c+z)-c]}{cp}$$

Beispiele.

1) Wie viel Gl. Zins geben 800 Gl. in 3 Jahren zu 5 Prozent?

Auflösung.

$$z = \frac{cpt}{100} = \frac{800 \times 5 \times 3}{100} = \frac{12000}{100} \; 120 = \text{Gl.}$$

2) Wie groß muß das Capital sein, welches zu 4 Prozent ausgeliehen nach 6 Jahren 1920 Gl. Zinsen getragen hat?

Auflösung.

$$c = \frac{100z}{pt} = \frac{100 \times 1920}{4 \times 6} = \frac{1922000}{24} = 8000 \text{ Gl.}$$

3) Zu wie viel Prozent muß man ein Capital von 4000 Gl. ausleihen, wenn es nach 5 Jahreu 600 Gl. Zinsen tragen soll?

Auflösung.

$$p = \frac{100z}{ct} = \frac{100 \times 600}{4000 \times 5} = \frac{60000}{20000} = 3 \text{ Prozent.}$$

4) In welcher Zeit geben 2000 Gl. zu 6 Prozent 480 Gl. Zins?

Auflösung.

$$t = \frac{100z}{cp} = \frac{100 \times 480}{2000 \times 6} = \frac{48000}{12000} = 4 \text{ Jahre.}$$

5) Ein Capital von 3000 Gl. ist zu 4 Prozent ausgeliehen; wie viel erhält man nach 6 Jahren an Capital und Zinsen zurück?

Auflösung.

$$c+z = \frac{c(100+pt)}{100} = \frac{3000(100+4 \times 6)}{100} = \frac{3000 \times 124}{100}$$
$$= \frac{372000}{100} = 3720 \text{ Gl.}$$

6) Wie groß muß das Capital sein, welches zu 5 Prozent ausgeliehen nach 4 Jahren 2880 Gl. Capital und Zinsen getragen hat?

Auflösung.

$$c = \frac{100(c+z)}{100+pt} = \frac{100 \times 2880}{100+5 \times 4} = \frac{288000}{120} = 2400 \text{ Gl.}$$

7) Zu wie viel Prozent muß man ein Capital von 1800 Gl. ausleihen, wenn es nach 5 Jahren 2340 Gl. Capital und Zinsen tragen soll?

Auflösung.

$$p = \frac{100[(c+z)-c]}{ct} = \frac{100(2340-1800)}{1800 \times 5} =$$

$$\frac{100 \times 540}{9000} = \frac{54000}{9000} = 6 \text{ Prozent.}$$

8) In welcher Zeit geben 1200 Gl. zu 3 Prozent 1488 Gl. Capital und Zinsen?

Auflösung.

$$t = \frac{100[(c+z)-c]}{cp} = \frac{100(1488-1200)}{1200 \times 3} =$$

$$\frac{100 \times 288}{3600} = \frac{28800}{3600} = 8 \text{ Jahre.}$$

II.

Die zusammengesetzte oder Zinseszinsrechnung.

Bezeichnet man

durch A das Capital und den Zins,
— c das Capital,
— p den Zinsfuß,
— n die Zeit;

so hat man, wenn man $\frac{100+p}{100} = e$ setzt,

den Werth von A am Ende des 1sten Jahres $= ce$,
— — — — — — — 2ten — $= ce^2$,
— — — — — — — 3ten — $= ce^3$,
. . . .
— — — — — — — nten — $= ce^n$;

also

$$A = ce^n \text{ oder } \log. A = \log. c + n \log. e$$

$$c = \frac{A}{e^n} \text{ oder } \log. c = \log. A - n \log. e$$

$$e = \sqrt[n]{\frac{A}{c}} \text{ oder } \log. e = \frac{\log. A - \log. c}{n}$$

$$a = \frac{\log. A - \log. c}{\log. e}$$

Beispiele.

1) Welches ist der Werth von 5000 L. zu 4 Prozent nach 12 Jahren, wenn es auf Zinseszinsen ausgeliehen ist?

Auflösung.

$$e = \frac{100+p}{100} = \frac{100+4}{100} = \frac{104}{100} = \frac{26}{25},$$

also

$$\log. A = \log. c + n \log. e = \log. 5000 + 12 \log. {}^{26}/_{25}$$

$$\log. {}^{26}/_{25} = 0{,}01703$$
$$\times 12$$

$$12 \log. {}^{26}/_{25} = 0{,}20436$$
$$\log. 5000 = 3{,}69897$$

$$\log. A = 3{,}90333 = 8005 \text{ L.}$$

2) Wie groß ist ein Capital, das mit Einschluß seiner zwanzigjährigen Zinseszinsen zu 5 Prozent 8000 L. beträgt?

Auflösung.

$$e = \frac{100+p}{100} = \frac{100+5}{100} = \frac{105}{100} = \frac{21}{20},$$

also

$$\log. c = \log. A - n \log. e = \log. 8000 - 20 \log. {}^{21}/_{20}$$

$$\log. {}^{21}/_{20} = 0,02119$$
$$\times 20$$

$$20 \log. {}^{21}/_{20} = 0,42380$$
$$\log. 8000 = 3,90309$$

$$\log. c = 3,47929 = 3015$$

3) Zu wie viel Prozent muß ein Capital von 2400 £. verzinseszinset werden, wenn der Werth desselben nach 10 Jahren 4500 £. betragen soll?

Auflösung.

$$\log. e = \frac{\log. A - \log. c}{n} = \frac{\log. 4500 - \log. 2400}{10}$$

$$\log. 4500 = 3,65321$$
$$\log. 2400 = 3,28021$$

$$\log. 4500 - \log. 2400 = 0,27300$$

$$\frac{0,27300}{10} = 0,02730 = 1,065 = e$$

also

$$e = \frac{100+p}{100} = 1,065$$

mithin $p = 6,5$ Prozent.

4) In wie viel Jahren ist ein Capital von 1400 £. mit Zinseszinsen zu 4 Prozent gleich 3600 £?

Auflösung.

$$e = \frac{100+p}{100} = \frac{100+4}{100} = \frac{104}{100} = \frac{26}{25}$$

also

$$n = \frac{\log. A - \log. c}{\log. e} = \frac{\log. 3600 - \log. 1400}{\log. {}^{26}/_{25}}$$

$\log.\ 26 = 1{,}41497$
$\log.\ 25 = 1{,}39794$
$\log.\ {}^{26}/_{25} = 0{,}01703$

$\log.\ 3600 = 3{,}55630$
$\log.\ 1400 = 3{,}14613$
$\log.\ 3600 - \log.\ 1400 = 0{,}41017$

$$n = \frac{0{,}41017}{0{,}01703} = 24 \text{ Jahre.}$$

Ein besonderer Fall zu der 4ten Formel.

Wie lange muß ein Capital auf Zinseszinsen stehen, wenn es m mal so groß werden soll?

Auflösung.

Das Capital sei = 1; also wird daraus nach x Jahren e^x. Es ist also

$$e^x = m,$$

$$\text{folglich } x = \frac{\log. m}{\log. e}$$

Beispiel.

Durch Berechnung dieser Formel findet man, daß ein beliebiges Capital zu 5 Prozent Zinseszinsen

zwischen	14 und	15	Jahren	2	mal so groß	wird.
—	22 —	23	—	3	—	
—	28 —	29	—	4	—	
—	32 —	33	—	5	—	
—	36 —	37	—	6	—	
—	39 —	40	—	7	—	
—	42 —	43	—	8	—	
—	45 —	46	—	9	—	
—	47 —	48	—	10	—	
—	94 —	95	—	100	—	
—	141 —	142	—	1000	—	
—	188 —	189	—	10000	—	
—	235 —	236	—	100000	—	
—	283 —	284	—	1000000	—	

Vierter Abschnitt.

Von den Kugelhaufen.

(In den Zeughäusern.)

Die dreiseitige Pyramide, Fig. 3.

Setzt man die Seite der untersten Schichte $= n$ Kugeln, so ist

$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

Die vierseitige Pyramide, Fig. 4.

Setzt man die Seite der untersten Schichte $= n$ Kugeln, so ist

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Der vierseitige länglichte Kugelhaufen, Fig. 5.

Es sei

$b =$ die Breite des Kugelhaufens,
$l =$ die Länge — —
$r =$ der Rücken — —

so erhält man, wenn zwei von diesen Größen gegeben sind, die Anzahl der Kugeln aus folgenden Formeln:

1) $$\frac{b(b+1)(3l-b+1)}{6}$$

2) $$\frac{(l-r-1)(l-r+2)(2l+r)}{6}$$

3) $$\frac{b(b+1)(2b+3r-2)}{6}$$

Beispiele.

1) Wie viel Kugeln werden sich in einer dreiseitigen Pyramide befinden, wenn die Grundseite 20 Kugeln enthält?

Auflösung.

$$s = \frac{n(n+1)(n+2)}{6} = \frac{20(20+1)(20+2)}{6} =$$

$$\frac{20 \times 21 \times 22}{6} = \frac{9240}{6} = 1540 \text{ Kugeln.}$$

2) Wie viel Kugeln werden sich in einer vierseitigen Pyramide befinden, wenn die Grundseite 15 Kugeln enthält?

Auflösung.

$$s = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{15(15+1)(2 \times 15+1)}{6}$$

$$= \frac{15 \times 16 \times 31}{6} = \frac{7440}{6} = 1240 \text{ Kugeln.}$$

3) Wie viel Kugeln werden sich in einem länglichten vierseitigen Kugelhaufen befinden, wenn der Rücken 8 und die kürzere Grundseite 21 Kugeln enthält?

Auflösung.

$$s = \frac{b(b+1)(2b+3r-2)}{6} =$$

$$\frac{21(21+1)(2 \times 21+3 \times 8-2)}{6} = \frac{21 \times 22 \times 64}{6} =$$

$$\frac{29568}{6} = 4928 \text{ Kugeln.}$$

4) Wie viel Kugeln werden sich in einem länglichten vierseitigen Kugelhaufen befinden, wenn der Rücken 8 und die längere Grundseite 28 Kugeln enthält?

Auflösung.

$$s = \frac{(l-r+1)(l-r+2)(2l+r)}{6} =$$

$$\frac{(28-8+1)(28-8+2)(2\times28+8)}{6} = \frac{21\times22\times64}{6} =$$

$$\frac{29568}{6} = 4928 \text{ Kugeln.}$$

5) Wie viel Kugeln werden sich in einem länglichten vierseitigen Kugelhaufen befinden, wenn die längere Grundseite 28 und die kürzere 21 Kugeln enthält?

Auflösung.

$$s = \frac{b(b+1)(3l-b+1)}{6} = \frac{21(21-1)(3\times28-21+1)}{6}$$

$$= \frac{21\times22\times64}{6} = \frac{29568}{6} = 4928 \text{ Kugeln.}$$

Tabelle

der

gemeinen Logarithmen

der

Zahlen von 1 bis 10000.

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
100	00000	043	087	130	173	217	260	303	346	389
101	432	475	518	561	604	647	689	732	775	817
102	00860	903	945	988	030	072	115	157	199	242
103	01284	326	368	410	452	494	536	578	620	662
104	703	745	787	828	870	912	953	995	036	078
105	02119	160	202	243	284	325	366	407	449	490
106	531	572	612	653	694	735	776	816	857	898
107	938	979	019	060	100	141	181	222	262	302
108	03342	383	423	463	503	543	583	623	663	703
109	743	782	822	862	902	941	981	021	060	100
110	04139	179	218	258	297	336	376	415	454	493
111	532	571	610	650	689	727	766	805	844	883
112	922	961	999	038	077	115	154	192	231	269
113	05308	346	385	423	461	500	538	576	614	652
114	690	729	767	805	843	881	918	956	994	032
115	06070	108	145	183	221	258	296	333	371	408
116	446	483	521	558	595	633	670	707	744	781
117	819	856	893	930	967	004	041	078	115	151
118	07188	225	262	298	335	372	408	445	482	518
119	555	591	628	664	700	737	773	809	846	882
120	918	954	990	027	063	099	135	171	207	243
121	08279	314	350	386	422	458	493	529	565	600
122	636	672	707	743	778	814	849	884	920	955
123	991	026	061	096	132	167	202	237	272	307
124	09342	377	412	447	482	517	552	587	621	656
125	691	726	760	795	830	864	899	934	968	003
126	10037	072	106	140	175	209	243	278	312	346
127	380	415	449	483	517	551	585	619	653	687
128	721	755	789	823	857	890	924	958	992	025
129	11059	093	126	160	193	227	261	294	327	361
130	394	428	461	494	528	561	594	628	661	694
131	727	760	793	826	860	893	926	959	992	024
132	12057	090	123	156	189	222	254	287	320	352
133	385	418	450	483	516	548	581	613	646	678
134	710	743	775	808	840	872	905	937	969	001
135	13033	066	098	130	162	194	226	258	290	322
136	354	386	418	450	481	513	545	577	609	640
137	672	704	735	767	799	830	862	893	925	956
138	988	019	051	082	114	145	176	208	239	270
139	14301	333	364	395	426	457	489	520	551	582
140	613	644	675	706	737	768	799	829	860	891
141	922	953	983	014	045	076	106	137	168	198
142	15229	259	290	320	351	381	412	442	473	503
143	534	564	594	625	655	685	715	746	776	806
144	836	866	897	927	957	987	017	047	077	107
145	16137	167	197	227	256	286	316	346	376	406
146	435	465	495	524	554	584	613	643	673	702
147	732	761	791	820	850	879	909	938	967	997
148	17026	056	085	114	143	173	202	231	260	289
149	319	348	377	406	435	464	493	522	551	580

Z.	Diff. P.		
	44	43	42
1	4	4	4
2	9	9	8
3	13	13	13
4	18	17	17
5	22	22	21
6	26	26	25
7	31	30	29
8	35	34	34
9	40	39	38
	41	40	39
1	4	4	4
2	8	8	8
3	12	12	12
4	16	16	16
5	21	20	20
6	25	24	23
7	29	28	27
8	33	32	31
9	37	36	35
	38	37	36
1	4	4	4
2	8	7	7
3	11	11	11
4	15	15	14
5	19	19	18
6	23	22	22
7	27	26	25
8	30	30	29
9	34	33	32
	35	34	33
1	4	3	3
2	7	7	7
3	11	10	10
4	14	14	13
5	18	17	17
6	21	20	20
7	25	24	23
8	28	27	26
9	32	31	30

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
150	17609	638	667	696	725	754	782	811	840	869
151	898	926	955	984	*013*	*041*	*070*	*099*	*127*	*156*
152	18184	213	241	270	298	327	355	384	412	441
153	469	498	526	554	583	611	639	667	696	724
154	752	780	808	837	865	893	921	949	977	*005*
155	19033	061	089	117	145	173	201	229	257	285
156	312	340	368	396	424	451	479	507	535	562
157	590	618	645	673	700	728	756	783	811	838
158	866	893	921	948	976	*003*	*030*	*058*	*085*	*112*
159	20140	167	194	222	249	276	303	330	358	385
160	412	439	466	493	520	548	575	602	629	656
161	683	710	737	763	790	817	844	871	898	925
162	952	978	*005*	*032*	*059*	*085*	*112*	*139*	*165*	*192*
163	21219	245	272	299	325	352	378	405	431	458
164	484	511	537	564	590	617	643	669	696	722
165	748	775	801	827	854	880	906	932	958	985
166	22011	037	063	089	115	141	167	194	220	246
167	272	298	324	350	376	401	427	453	479	505
168	531	557	583	608	634	660	686	712	737	763
169	789	814	840	866	891	917	943	968	994	*019*
170	23045	070	096	121	147	172	198	223	249	274
171	300	325	350	376	401	426	452	477	502	528
172	553	578	603	629	654	679	704	729	754	779
173	805	830	855	880	905	930	955	980	*005*	*030*
174	24055	080	105	130	155	180	204	229	254	279
175	304	329	353	378	403	428	452	477	502	527
176	551	576	601	625	650	674	699	724	748	773
177	797	822	846	871	895	920	944	969	993	*018*
178	25042	066	091	115	139	164	188	212	237	261
179	285	310	334	358	382	406	431	455	479	503
180	527	551	575	600	624	648	672	696	720	744
181	768	792	816	840	864	888	912	935	959	983
182	26007	031	055	079	102	126	150	174	198	221
183	245	269	293	316	340	364	387	411	435	458
184	482	505	529	553	576	600	623	647	670	694
185	717	741	764	788	811	834	858	881	905	928
186	951	975	998	*021*	*045*	*068*	*091*	*114*	*138*	*161*
187	27184	207	231	254	277	300	323	346	370	393
188	416	439	462	485	508	531	554	577	600	623
189	646	669	692	715	738	761	784	807	830	852
190	875	898	921	944	967	989	*012*	*035*	*058*	*081*
191	28103	126	149	171	194	217	240	262	285	307
192	330	353	375	398	421	443	466	488	511	533
193	556	578	601	623	646	668	691	713	735	758
194	780	803	825	847	870	892	914	937	959	981
195	29003	026	048	070	092	115	137	159	181	203
196	226	248	270	292	314	336	358	380	403	425
197	447	469	491	513	535	557	579	601	623	645
198	667	688	710	732	754	776	798	820	842	863
199	885	907	929	951	973	994	*016*	*038*	*060*	*081*

Z.	Diff. P.		
	32	31	30
1	3	3	3
2	6	6	6
3	10	9	9
4	13	12	12
5	16	16	15
6	19	19	18
7	22	22	21
8	26	25	24
9	29	28	27
	29	28	27
1	3	3	3
2	6	6	5
3	9	8	8
4	12	11	11
5	15	14	14
6	17	17	16
7	20	20	19
8	23	22	22
9	26	25	24
	26	25	24
1	3	3	2
2	5	5	5
3	8	8	7
4	10	10	10
5	13	13	12
6	16	15	14
7	18	18	17
8	20	20	19
9	23	23	22
	23	22	21
1	2	2	2
2	5	4	4
3	7	7	6
4	9	9	8
5	12	11	11
6	14	13	13
7	16	15	15
8	18	18	17
9	20	20	19

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
200	30103	125	146	168	190	211	233	255	276	298
201	320	341	363	384	406	428	449	471	492	514
202	535	557	578	600	621	643	664	685	707	728
203	750	771	792	814	835	856	878	899	920	942
204	963	984	*006*	*027*	*048*	*069*	*091*	*112*	*133*	*154*
205	31175	197	218	239	260	281	302	323	345	366
206	387	408	429	450	471	492	513	534	555	576
207	597	618	639	660	681	702	723	744	765	785
208	806	827	848	869	890	911	931	952	973	994
209	32015	035	056	077	098	118	139	160	181	201
210	222	243	263	284	305	325	346	366	387	408
211	428	449	469	490	510	531	552	572	593	613
212	634	654	675	695	715	736	756	777	797	818
213	838	858	879	899	919	940	960	980	*001*	*021*
214	33041	062	082	102	122	143	163	183	203	224
215	244	264	284	304	325	345	365	385	405	425
216	445	465	486	506	526	546	566	586	606	626
217	646	666	686	706	726	746	766	786	806	826
218	846	866	885	905	925	945	965	985	*005*	*025*
219	34044	064	084	104	124	143	163	183	203	223
220	242	262	282	301	321	341	361	380	400	420
221	439	459	479	498	518	537	557	577	596	616
222	635	655	674	694	713	733	753	772	792	811
223	830	850	869	889	908	928	947	967	986	*005*
224	35025	044	064	083	102	122	141	160	180	199
225	218	238	257	276	295	315	334	353	372	392
226	411	430	449	468	488	507	526	545	564	583
227	603	622	641	660	679	698	717	736	755	774
228	793	813	832	851	870	889	908	927	946	965
229	984	*003*	*021*	*040*	*059*	*078*	*097*	*116*	*135*	*154*
230	36173	192	211	229	248	267	286	305	324	342
231	361	380	399	418	436	455	474	493	511	530
232	549	568	586	605	624	642	661	680	698	717
233	736	754	773	791	810	829	847	866	884	903
234	922	940	959	977	996	*014*	*033*	*051*	*070*	*088*
235	37107	125	144	162	181	199	218	236	254	273
236	291	310	328	346	365	383	401	420	438	457
237	475	493	511	530	548	566	585	603	621	639
238	658	676	694	712	731	749	767	785	803	822
239	840	858	876	894	912	931	949	967	985	*003*
240	38021	039	057	075	093	112	130	148	166	184
241	202	220	238	256	274	292	310	328	346	364
242	382	399	417	435	453	471	489	507	525	543
243	561	578	596	614	632	650	668	686	703	721
244	739	757	775	792	810	828	846	863	881	899
245	917	934	952	970	987	*005*	*023*	*041*	058	*076*
246	39094	111	129	146	164	182	199	217	235	252
247	270	287	305	322	340	358	375	393	410	428
248	445	463	480	498	515	533	550	568	585	602
249	620	637	655	672	690	707	724	742	759	777

Z.	Diff. P.		
	22	21	20
1	2	2	2
2	4	4	4
3	7	6	6
4	9	8	8
5	11	11	10
6	15	13	12
7	15	15	14
8	18	17	16
9	20	19	18
	19	18	17
1	2	2	2
2	4	4	3
3	6	5	5
4	8	7	7
5	10	9	9
6	11	11	10
7	13	13	12
8	15	14	14
9	17	16	15

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
250	39794	811	829	846	863	881	898	915	933	950
251	967	985	002	019	037	054	071	088	106	123
252	40140	157	175	192	209	226	243	261	278	295
253	312	329	346	364	381	398	415	432	449	466
254	483	500	518	535	552	569	586	603	620	637
255	654	671	688	705	722	739	756	773	790	807
256	824	841	858	875	892	909	926	943	960	976
257	993	010	027	044	061	078	095	111	128	145
258	41162	179	196	212	229	246	265	280	296	313
259	330	347	363	380	397	414	430	447	464	481
260	497	514	531	547	564	581	597	614	631	647
261	664	681	697	714	731	747	764	780	797	814
262	830	847	863	880	896	913	929	946	963	979
263	996	012	029	045	062	078	095	111	127	144
264	42160	177	193	210	226	243	259	275	292	308
265	325	341	357	374	390	406	423	439	455	472
266	488	504	521	537	553	570	586	602	619	635
267	651	667	684	700	716	732	749	765	781	797
268	813	830	846	862	878	894	911	927	943	959
269	975	991	008	024	040	056	072	088	104	120
270	43136	152	169	185	201	217	233	249	265	281
271	297	313	329	345	361	377	393	409	425	441
272	457	473	489	505	521	537	553	569	584	600
273	616	632	648	664	680	696	712	727	743	759
274	775	791	807	823	838	854	870	886	902	917
275	933	949	965	981	996	012	028	044	059	075
276	44091	107	122	138	154	170	185	201	217	232
277	248	264	279	295	311	326	342	358	373	389
278	404	420	436	451	467	483	498	514	529	545
279	560	576	592	607	623	638	654	669	685	700
280	716	731	747	762	778	793	809	824	840	855
281	871	886	902	917	932	948	963	979	994	010
282	45025	040	056	071	086	102	117	133	148	163
283	179	194	209	225	240	255	271	286	301	317
284	332	347	362	378	393	408	423	439	454	469
285	484	500	515	530	545	561	576	591	606	621
286	637	652	667	682	697	712	728	743	758	773
287	788	803	818	834	849	864	879	894	909	924
288	939	954	969	984	000	015	030	045	060	075
289	36090	105	120	135	150	165	180	195	210	225
290	240	255	270	285	300	315	330	345	359	374
291	389	404	419	434	449	464	479	494	509	523
292	538	553	568	583	598	613	627	642	657	672
293	687	702	716	731	746	761	776	790	805	820
294	835	850	864	879	894	909	923	938	953	967
295	982	997	012	026	041	056	070	085	100	114
296	47129	144	159	173	188	202	217	232	246	261
297	276	290	305	319	338	349	363	378	392	407
298	422	436	451	465	484	494	509	524	538	553
299	567	582	596	611	6250	640	654	669	683	698

Z.	Diff. P.		
	18	17	16
1	2	2	2
2	4	3	3
3	5	5	5
4	7	7	6
5	9	9	8
6	11	10	10
7	13	12	11
8	14	14	13
9	16	15	14

Z.	16	15	14
1	2	2	1
2	3	3	3
3	5	5	4
4	6	6	6
5	8	8	7
6	10	9	8
7	11	11	10
8	13	12	11
9	14	14	13

No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
300	47712	727	741	756	770	784	799	813	828	842
301	857	871	885	900	914	929	943	958	972	986
302	48001	015	029	044	058	073	087	101	116	130
303	144	159	173	187	202	216	230	244	259	273
304	287	302	316	330	344	359	373	387	401	416
305	430	444	458	473	487	501	515	530	544	558
306	572	586	601	615	629	643	657	671	686	700
307	714	728	742	756	770	785	799	813	827	841
308	855	869	883	897	911	926	940	954	968	982
309	996	*010*	*024*	*038*	*052*	*066*	*080*	*094*	*108*	*122*
310	49136	150	164	178	192	206	220	234	248	262
311	276	290	304	318	332	346	360	374	388	402
312	415	429	443	457	471	485	499	513	527	541
313	554	568	582	596	610	624	638	651	665	679
314	693	707	721	734	748	762	776	790	803	817
515	831	845	859	872	886	900	914	927	941	955
316	969	982	996	*010*	*024*	*037*	*051*	*065*	*079*	*092*
317	50106	120	133	147	161	174	188	202	215	229
318	243	256	270	284	297	311	325	338	352	365
319	379	393	406	420	433	447	461	474	488	501
320	515	529	542	556	569	583	596	610	623	637
321	651	664	678	691	705	718	732	745	759	772
322	786	799	813	826	840	853	866	880	893	907
323	920	934	947	961	974	987	*001*	*014*	*028*	*041*
324	51055	068	081	095	108	121	135	148	161	175
325	188	202	215	228	242	255	268	282	295	308
326	322	335	348	362	375	388	402	415	428	441
327	455	468	481	495	508	521	534	548	561	574
328	587	601	614	627	640	654	667	680	693	706
329	720	733	746	759	772	786	799	812	825	838
330	851	865	878	891	904	917	930	943	957	970
331	983	996	*009*	*022*	*035*	*048*	*061*	*075*	*088*	*101*
332	52114	127	140	153	166	179	192	205	218	231
333	244	257	270	284	297	310	323	336	349	362
334	375	388	401	414	427	440	453	466	479	492
335	504	517	530	543	556	569	582	595	608	621
336	634	647	660	673	686	699	711	724	737	750
337	763	776	789	802	815	827	840	853	866	879
338	892	905	917	930	943	956	969	982	994	*007*
339	53020	033	046	058	071	084	097	110	122	135
340	148	161	173	186	199	212	224	237	250	263
241	275	288	301	314	326	339	352	364	377	390
342	403	415	428	441	453	466	479	491	504	517
343	529	542	555	567	580	593	605	618	631	643
344	656	668	681	694	706	719	732	744	757	769
345	782	794	807	820	832	845	857	870	883	895
346	908	920	933	945	958	970	983	995	*008*	*020*
347	54033	045	058	070	083	095	108	120	133	145
348	158	170	183	195	208	220	233	245	258	270
349	283	295	307	320	332	345	357	370	382	394

S.	Diff. 15	P. 14
1	2	1
2	3	3
3	5	4
4	6	6
5	8	7
6	9	8
7	11	10
8	12	11
9	14	13

S.	13	12
1	1	1
2	3	2
3	4	4
4	5	5
5	7	6
6	8	7
7	9	8
8	10	10
9	12	11

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
350	54407	419	432	444	456	469	481	494	506	518
351	531	543	555	568	580	593	605	617	630	642
352	654	667	679	691	704	716	728	741	753	765
353	777	790	802	814	827	839	851	864	876	888
354	900	913	925	937	949	962	974	986	998	011
355	55023	035	047	060	072	084	096	108	121	133
356	145	157	169	182	194	206	218	230	242	255
357	267	279	291	303	315	328	340	352	364	376
358	388	400	413	425	437	449	461	473	485	497
359	509	522	534	546	558	570	582	594	606	618
360	630	642	654	666	678	691	703	715	727	739
361	751	763	775	787	799	811	823	835	847	859
362	871	883	895	907	919	931	943	955	967	979
363	991	003	015	027	038	050	062	074	086	098
364	56110	122	134	146	158	170	182	194	205	217
365	229	241	253	265	277	289	301	312	324	336
366	348	360	372	384	396	407	419	431	443	455
367	467	478	490	502	514	526	538	549	561	573
368	585	597	608	620	632	644	656	667	679	691
369	703	714	726	738	750	761	773	785	797	808
370	820	832	844	855	867	879	891	902	914	926
371	937	949	961	972	984	996	008	019	031	043
372	57054	066	078	089	101	113	124	136	148	159
373	171	183	194	206	217	229	241	252	264	276
374	287	299	310	322	334	345	357	368	380	392
375	403	415	426	438	449	461	473	484	496	507
376	519	530	542	553	565	576	588	600	611	623
377	634	646	657	669	680	692	703	715	726	738
378	749	761	772	784	795	807	818	830	841	852
379	864	875	887	898	910	921	933	944	955	967
380	978	990	001	013	024	035	047	058	070	081
381	58092	104	115	127	138	149	161	172	184	195
382	206	218	229	240	252	263	274	286	297	309
383	320	331	343	354	365	377	388	399	410	422
384	433	444	456	467	478	490	501	512	524	535
385	546	557	569	580	591	602	514	625	636	647
386	659	670	681	692	704	715	726	737	749	760
387	771	782	794	805	816	827	838	850	861	872
388	883	894	906	917	928	939	950	961	973	984
389	995	006	017	028	040	051	062	073	084	095
390	59106	118	129	140	151	162	173	184	195	207
391	218	229	240	251	262	273	284	295	306	318
392	329	340	351	362	373	384	395	406	417	428
393	439	450	461	472	483	494	506	517	528	539
394	550	561	572	583	594	605	616	627	638	649
395	660	671	682	693	704	715	726	737	748	759
396	770	780	791	802	813	824	835	846	857	868
397	879	890	901	912	923	934	945	956	966	977
398	988	999	010	021	032	043	054	065	076	086
399	60097	108	119	130	141	152	163	173	184	195

8.	Diff. P. 13	12
1	1	1
2	3	2
3	4	4
4	5	5
5	7	6
6	8	7
7	9	8
8	10	10
9	12	11

8.	11	10
1	1	1
2	2	2
3	3	3
4	4	4
5	6	5
6	7	6
7	8	7
8	9	8
9	10	9

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
400	60206	217	228	239	249	260	271	282	293	304
401	314	325	336	347	358	369	379	390	401	412
402	423	433	444	455	466	477	487	498	509	520
403	531	541	552	563	574	584	595	606	617	627
404	638	649	660	670	681	692	703	713	724	735
405	746	756	767	778	788	799	810	821	831	842
406	853	863	874	885	895	906	917	927	938	949
407	959	970	981	991	002	013	023	034	045	055
408	61066	077	087	098	109	119	130	140	151	162
409	172	183	194	204	215	225	247	236	257	268
410	278	289	300	310	321	331	342	352	363	374
411	384	395	405	416	426	437	448	458	469	479
412	490	500	511	521	532	542	553	563	574	584
413	595	606	616	627	637	648	658	669	679	690
414	700	711	721	731	742	652	763	763	784	794
415	805	815	826	836	847	857	868	878	888	899
416	909	920	930	941	951	962	972	982	993	003
417	62014	024	034	045	055	066	076	086	097	107
418	118	128	138	149	159	170	180	190	201	211
419	221	232	242	252	263	273	284	294	304	315
420	325	335	346	356	366	377	387	397	408	418
421	428	439	449	459	469	480	490	500	511	521
422	531	542	552	562	572	583	593	603	613	624
423	634	644	655	665	675	685	696	706	716	726
524	737	747	757	767	778	788	798	808	818	829
425	839	849	859	870	880	890	900	910	921	931
426	941	951	961	972	982	992	002	012	022	033
427	63043	053	063	073	083	094	104	114	124	134
428	144	155	165	175	185	195	205	215	225	236
429	246	256	266	276	286	296	306	317	327	337
430	347	357	367	377	387	397	407	417	428	438
431	448	458	468	478	488	498	508	518	528	438
432	548	558	568	579	589	599	609	619	629	639
433	649	659	669	679	689	699	709	719	729	739
434	749	759	769	779	789	799	809	819	829	839
435	949	859	869	879	889	899	909	919	929	939
436	949	959	969	979	988	998	008	018	028	038
437	64048	058	068	078	088	098	108	118	128	137
438	147	157	167	177	187	197	207	217	227	237
439	246	256	266	276	286	296	306	316	326	335
440	345	355	365	375	385	395	404	414	424	434
441	444	454	464	473	483	493	503	513	523	532
442	542	552	462	572	582	591	601	611	621	631
443	640	650	660	670	680	689	699	709	719	729
444	738	748	758	768	777	787	797	807	716	826
445	836	846	856	865	875	885	895	904	914	924
446	933	943	953	963	972	982	992	002	011	021
447	65031	040	050	060	070	079	089	099	108	118
448	128	137	147	157	167	176	186	196	205	215
449	225	234	244	254	263	273	283	292	302	312

S.	Diff. P. 11	10	9
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	3
4	4	4	4
5	6	5	5
6	7	6	5
7	8	7	6
8	9	8	7
9	10	9	8

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
450	65321	331	341	350	360	369	379	389	398	408
451	418	427	437	447	456	466	475	485	495	504
452	514	523	533	543	552	562	571	581	591	600
453	610	619	629	639	648	658	667	677	686	696
454	706	715	725	734	744	753	763	772	782	792
455	801	811	820	830	839	849	858	868	877	887
456	896	906	916	925	935	944	954	963	973	982
457	992	*001*	*011*	*020*	*030*	*039*	*049*	*058*	*068*	*077*
458	66087	096	106	115	124	134	143	153	162	172
459	181	191	200	210	219	229	238	247	257	266
460	276	285	295	304	314	323	332	342	351	361
461	370	380	389	398	408	417	427	436	445	455
462	464	474	483	492	502	511	521	530	539	549
463	558	567	577	586	596	605	614	624	633	642
464	652	661	671	680	689	699	708	717	727	736
465	745	755	764	773	783	792	801	811	820	829
466	839	848	857	867	876	885	894	904	913	922
467	932	941	950	960	969	978	987	997	*006*	*015*
468	67025	034	043	052	062	071	080	089	099	108
469	117	127	136	145	154	164	173	182	191	201
470	210	219	228	237	247	256	265	274	284	293
471	302	311	321	330	339	348	357	367	376	385
472	394	403	413	422	431	440	449	459	468	477
473	486	495	504	514	523	532	541	550	560	569
474	578	587	596	605	614	624	633	642	651	660
475	669	679	688	697	706	715	724	733	742	752
476	761	770	779	788	797	806	815	825	834	843
477	852	861	870	879	888	897	906	916	925	934
478	943	952	961	970	979	988	997	*006*	*015*	*024*
479	68034	043	052	061	070	079	088	097	106	115
480	124	133	142	151	160	169	178	187	196	205
481	215	224	233	242	251	260	269	278	287	296
482	305	314	323	332	341	350	359	368	377	386
483	395	404	413	422	431	440	449	458	467	476
484	485	494	502	511	520	529	538	547	556	565
485	574	583	592	601	610	619	628	637	646	655
486	664	673	681	690	699	708	717	726	735	744
487	753	762	771	780	789	797	806	815	824	833
488	842	851	860	869	878	886	895	904	913	922
489	931	940	949	958	966	975	984	993	*002*	*011*
490	69020	028	037	046	055	064	073	082	090	099
491	108	117	126	135	144	152	161	170	179	188
492	197	205	214	223	132	241	249	258	267	276
493	285	294	302	311	320	329	338	346	355	364
494	373	381	390	399	408	417	425	434	443	452
495	461	469	478	487	496	504	513	522	531	539
496	548	557	566	574	583	592	601	609	618	627
497	636	644	653	662	671	679	688	697	705	714
498	723	732	740	749	758	767	775	784	793	801
499	810	819	827	836	845	854	862	871	880	888

P. P.	10	9	8
1	1	1	1
2	2	2	2
3	3	3	2
4	4	4	3
5	5	5	4
6	6	5	5
7	7	6	6
8	8	7	6
9	9	8	7

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
500	69897	906	914	923	932	940	949	958	966	975
501	984	992	001	010	018	027	036	044	053	062
502	70070	079	088	096	105	114	122	131	140	148
503	157	165	174	182	191	200	209	217	226	234
504	243	252	260	269	278	286	295	303	312	321
505	329	338	346	355	364	372	381	389	398	406
506	415	424	432	441	449	458	467	475	484	492
507	501	509	518	526	535	544	552	561	569	578
508	586	595	603	612	621	629	638	646	655	663
509	672	680	689	697	706	714	723	731	740	749
510	757	766	774	783	791	800	808	817	825	834
511	842	851	859	868	876	885	893	902	910	919
512	927	935	944	952	961	969	978	986	995	003
513	71012	020	029	037	046	054	063	071	079	088
514	096	105	113	122	130	139	147	155	164	172
515	181	189	198	206	214	223	231	240	248	257
516	265	273	282	290	299	307	315	324	332	341
517	349	357	366	374	383	391	399	408	416	425
518	433	441	450	458	466	475	483	492	500	508
519	517	525	533	542	550	559	567	575	584	592
520	600	609	617	625	634	642	650	659	667	675
521	684	692	700	709	717	725	734	742	750	759
522	767	775	784	792	800	809	817	825	834	842
523	850	858	867	875	883	892	900	908	917	925
524	933	941	950	958	966	975	983	991	999	008
525	72016	024	032	041	049	057	066	074	082	090
526	099	107	115	123	132	140	148	156	165	173
527	181	189	198	206	214	222	230	239	247	255
528	263	272	280	288	296	304	313	321	329	337
529	346	354	362	370	378	387	395	403	411	419
530	428	436	444	452	460	469	477	485	493	501
531	509	518	526	534	542	550	558	567	575	583
532	591	599	607	616	624	632	640	648	656	665
533	673	681	689	697	705	713	722	730	738	746
534	754	762	770	779	787	795	803	811	819	827
535	835	843	852	860	868	876	884	892	900	908
536	916	925	933	941	949	957	965	973	981	989
537	997	006	014	022	030	038	046	054	062	070
538	73078	086	094	102	111	119	127	135	143	151
539	159	167	175	183	191	199	207	215	223	231
540	239	247	255	263	272	280	288	296	304	312
541	320	328	336	344	352	360	368	376	384	392
542	400	408	416	424	432	440	448	456	464	472
543	480	488	496	504	512	520	528	536	544	552
544	560	568	576	584	592	600	608	616	624	632
545	640	648	656	664	672	679	687	695	703	711
546	719	727	735	743	751	759	767	775	783	791
547	799	807	815	823	830	838	846	854	862	870
548	878	886	894	902	910	918	926	933	941	949
549	957	965	973	981	989	997	005	013	020	028

Z.	Diff. P. 9	8	7
1	1	1	1
2	2	2	1
3	3	2	2
4	4	3	3
5	5	4	4
6	5	5	4
7	6	6	5
8	7	6	6
9	8	7	6

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
550	74036	044	052	060	068	076	084	092	099	107
551	115	123	131	139	147	155	162	170	178	186
552	194	202	210	218	225	233	241	249	257	265
553	273	280	288	296	304	312	320	327	335	343
554	351	359	367	374	382	390	398	406	414	421
555	429	437	445	453	461	468	476	484	492	500
556	507	515	523	531	539	547	554	562	570	578
557	586	593	601	609	617	624	632	640	648	656
558	663	671	679	687	695	702	710	718	726	733
559	741	749	757	764	772	780	788	796	803	811
560	819	827	834	842	850	858	865	873	881	889
561	896	904	912	920	927	935	943	950	958	966
562	974	981	989	997	005	012	020	028	035	043
563	75051	059	066	074	082	089	097	105	113	120
564	128	136	143	151	159	166	174	182	189	197
565	205	213	220	228	236	243	251	259	266	274
566	282	289	297	305	312	320	328	335	343	351
567	358	366	374	381	389	397	404	412	420	427
568	435	442	450	458	465	473	481	488	406	504
569	511	519	526	534	542	549	557	565	572	580
570	587	595	603	610	618	626	633	641	648	656
571	664	671	679	686	694	702	709	717	724	732
572	740	747	755	762	770	778	785	793	800	808
573	815	823	831	838	846	853	861	868	876	884
574	891	899	906	914	921	929	937	944	952	959
575	967	974	982	989	997	005	012	020	027	035
576	76042	050	057	065	072	080	087	095	103	110
577	118	125	133	140	148	155	163	170	178	185
578	193	200	208	215	223	230	238	245	253	260
579	268	275	283	290	298	305	313	320	328	335
580	343	350	358	365	373	380	388	395	403	410
581	418	425	433	440	448	455	462	470	477	485
582	492	500	507	515	522	530	537	545	552	559
583	567	574	582	589	597	604	612	619	626	634
584	641	649	656	664	671	678	686	693	701	708
585	716	723	730	738	745	753	760	768	775	782
586	790	797	805	812	819	827	834	842	849	856
587	864	871	879	886	893	901	908	916	923	930
588	938	945	953	960	967	975	982	989	997	004
589	77012	019	026	034	041	048	056	063	070	078
590	085	093	100	107	115	122	129	137	144	151
591	159	166	173	181	188	195	203	210	217	225
592	232	240	277	254	262	269	276	283	291	298
593	305	313	320	327	336	352	349	357	364	371
594	379	386	393	401	408	415	422	430	437	444
595	452	459	466	474	481	488	495	503	510	517
596	525	532	539	546	554	561	568	576	583	590
597	597	605	612	619	627	634	641	648	656	663
598	670	677	685	692	699	706	714	721	728	735
599	743	750	757	764	772	779	786	793	801	808

P.	Diff. 8	P. 7
1	1	1
2	2	1
3	2	2
4	3	3
5	4	4
6	5	4
7	6	5
8	6	6
9	7	6

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.	Diff. P.		
600	77815	822	830	837	844	851	859	866	873	880		8	7	6
601	887	895	902	909	916	924	931	938	945	952	1	1	1	1
602	960	967	974	981	988	996	003	010	017	025	2	2	1	1
603	78032	039	046	053	061	068	075	082	089	097	3	2	2	2
604	104	111	118	125	132	140	147	154	161	168	4	3	3	2
605	176	183	190	197	204	211	219	226	233	240	5	4	4	3
606	247	254	262	269	276	283	290	297	305	312	6	5	4	4
607	319	326	333	340	347	355	362	369	376	383	7	6	5	4
608	390	398	405	412	419	426	433	440	447	455	8	6	6	5
609	462	469	476	483	490	497	505	512	519	526	9	7	6	5
610	533	540	547	554	561	569	576	583	590	597				
611	604	611	618	625	633	640	647	654	661	668				
612	675	682	689	696	704	711	718	725	732	739				
613	746	753	760	767	774	781	789	796	803	810				
614	817	824	831	838	845	852	859	866	873	880				
615	888	895	902	909	916	923	930	937	944	951				
616	958	965	972	979	986	993	000	007	014	021				
617	79029	036	043	050	057	064	071	078	085	092				
618	099	106	113	120	127	134	141	148	155	162				
619	169	176	183	190	197	204	211	218	225	232				
620	239	246	253	260	267	274	281	288	295	302				
621	309	316	323	330	337	344	351	358	365	372				
622	379	386	393	400	407	414	421	428	435	442				
623	449	456	463	470	477	484	491	498	505	511				
624	518	525	532	539	546	553	560	567	574	581				
625	588	595	602	609	616	623	630	637	644	650				
626	657	664	671	678	685	692	699	706	713	720				
627	727	734	741	748	754	761	768	775	782	789				
628	796	803	810	817	824	831	837	844	851	858				
629	865	872	879	886	893	900	906	913	920	927				
630	934	941	948	955	962	969	975	982	989	996				
631	80003	010	017	024	030	037	044	051	058	065				
632	072	079	085	092	099	106	113	120	127	134				
633	140	147	154	161	168	175	182	188	195	202				
634	209	216	223	229	236	243	250	257	264	271				
635	277	284	291	298	305	312	318	325	332	339				
636	346	353	359	366	373	380	387	393	400	407				
637	414	421	428	434	441	448	455	462	468	475				
638	482	489	496	502	509	516	523	530	536	543				
639	550	557	564	570	577	584	591	598	604	611				
640	618	625	632	638	645	652	659	665	672	679				
641	686	693	699	706	713	720	726	733	740	747				
642	754	760	767	774	781	787	794	801	808	814				
643	821	828	835	841	848	855	862	868	875	882				
644	889	895	902	909	916	922	929	936	943	949				
645	956	963	969	976	983	990	996	003	010	017				
646	81023	030	037	043	050	057	064	070	077	084				
647	090	097	104	111	117	124	131	137	144	151				
648	158	164	171	178	184	191	198	204	211	218				
649	224	231	238	245	251	258	265	271	278	285				

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
650	81291	298	305	311	318	325	331	338	345	351
651	358	365	371	378	385	391	398	405	411	418
652	425	431	438	445	451	458	465	471	478	485
653	491	498	505	511	518	525	531	538	544	551
654	558	564	571	578	584	591	598	604	611	617
655	624	631	637	644	651	657	664	671	677	684
656	690	697	704	710	717	723	730	737	743	750
657	757	763	770	776	783	790	796	803	809	816
658	823	829	836	842	849	856	862	869	875	882
659	889	895	902	908	915	921	928	935	941	948
660	954	961	968	974	981	987	994	000	007	014
661	82020	027	033	040	046	053	060	066	073	079
662	086	092	099	105	112	119	125	132	138	145
663	151	158	164	171	178	184	191	197	204	210
664	217	223	230	236	243	250	256	263	269	276
665	282	289	295	302	308	315	321	328	334	341
666	347	354	360	367	373	380	387	393	400	406
667	413	419	426	432	439	445	452	458	465	471
668	478	484	491	497	504	510	517	523	530	536
669	543	549	556	562	569	575	582	588	595	601
670	607	614	620	627	633	640	946	653	659	666
671	672	679	685	692	698	705	711	718	724	730
672	737	743	750	756	763	769	776	782	789	795
673	802	808	814	821	827	834	840	847	853	860
674	866	872	879	885	892	898	905	911	918	924
675	930	937	943	950	956	963	969	975	982	988
676	995	001	008	014	020	027	033	040	046	052
677	83059	065	072	078	085	091	097	104	110	117
678	123	129	136	142	149	155	161	168	174	181
679	187	193	200	206	213	219	225	232	238	245
680	251	257	264	270	276	283	289	296	302	308
681	315	321	327	334	340	347	353	359	366	372
682	378	385	391	398	404	410	417	423	429	436
683	442	448	455	461	467	474	480	487	493	499
684	506	512	518	525	531	537	544	550	556	563
685	569	575	582	588	594	601	607	613	620	626
686	632	639	645	651	658	664	670	677	683	689
687	696	702	708	715	721	727	734	740	746	753
688	759	765	771	778	784	790	797	803	809	816
689	822	828	835	841	847	853	860	866	872	879
690	885	891	897	904	910	916	923	929	935	942
691	948	954	960	967	973	979	985	992	998	004
692	84011	017	023	029	036	042	048	055	061	067
693	073	080	086	092	098	105	111	117	123	130
694	136	142	148	155	161	167	173	180	186	192
695	198	205	211	217	223	230	236	242	248	255
696	261	267	273	280	286	292	298	305	311	317
697	323	330	336	332	348	354	361	367	373	379
698	386	392	398	404	410	417	423	429	435	442
699	448	454	460	466	473	479	485	491	497	504

Z.	Dif 7
1	1
2	1
3	2
4	3
5	4
6	4
7	5
8	6
9	6

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
700	84510	516	522	528	535	541	547	553	559	566
701	572	578	584	590	597	603	609	615	621	628
702	634	640	646	652	658	665	671	677	683	689
703	696	702	708	714	720	726	733	739	745	751
704	757	763	770	776	782	788	794	800	807	813
706	819	825	831	837	844	850	856	862	868	874
706	880	887	893	899	905	911	917	924	930	936
707	942	948	954	960	967	973	979	985	991	997
708	85003	009	016	022	028	034	040	046	052	058
709	065	071	077	083	089	095	101	107	114	120
710	126	132	138	144	150	156	163	169	175	181
711	187	193	199	205	211	217	224	230	236	242
712	248	254	260	266	272	278	285	291	297	303
713	309	315	321	327	333	339	345	352	358	364
714	370	376	382	388	394	400	406	412	418	425
715	431	437	443	449	455	562	467	473	479	485
716	491	497	503	509	516	522	528	534	540	546
717	552	558	564	570	576	582	588	594	600	606
718	612	618	625	631	637	643	649	655	661	667
719	673	679	685	691	697	703	709	715	721	727
720	733	739	745	751	757	763	769	775	781	788
721	794	800	806	812	818	824	830	836	842	848
722	854	860	866	872	878	884	890	896	902	908
723	914	920	926	932	938	944	950	956	962	968
724	974	980	986	992	998	004	010	016	022	028
725	86034	040	046	052	058	064	070	076	082	088
726	094	100	106	112	118	124	130	136	141	147
727	153	159	165	171	177	183	189	195	201	207
728	213	219	225	231	237	243	249	255	261	267
729	273	279	285	291	297	303	308	314	320	326
730	332	338	344	350	356	362	368	374	380	386
731	392	398	404	410	415	421	427	433	439	445
732	451	457	463	469	475	481	487	493	499	504
733	510	516	522	528	534	540	546	552	558	564
734	570	576	581	587	593	599	605	611	617	623
735	629	635	641	646	652	658	664	670	676	682
736	688	694	700	705	711	717	723	729	735	741
737	747	753	759	764	770	776	782	788	794	800
738	806	812	817	823	829	835	841	847	853	859
739	864	870	876	882	888	894	900	906	911	917
740	923	929	935	941	947	953	958	964	970	976
741	982	988	994	999	005	011	017	023	029	035
742	87040	046	052	058	064	070	075	081	087	093
743	099	105	111	116	122	128	134	140	146	151
744	157	163	169	175	181	186	192	198	204	210
745	216	221	227	233	239	245	251	256	262	268
746	274	280	286	291	297	303	309	315	320	326
747	332	338	344	349	355	361	367	373	379	384
748	390	396	402	408	413	419	425	431	437	442
749	448	454	460	466	471	477	483	489	495	500

Z.	Diff. P. 7	6	5
1	1	1	1
2	1	1	1
3	2	2	2
4	3	2	2
5	4	3	3
6	4	4	3
7	5	4	4
8	6	5	4
9	6	5	5

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	Diff. P.		
750	87506	512	518	523	529	535	541	547	552	558		6	5
751	564	570	576	581	587	593	599	604	610	616	1	1	1
752	622	628	633	639	645	651	656	662	668	674	2	1	1
753	679	685	691	697	703	708	714	720	726	731	3	2	2
754	737	743	749	754	760	766	772	777	783	789	4	2	2
755	795	800	806	812	818	823	829	835	841	846	5	3	3
756	852	858	864	869	875	881	887	892	898	904	6	4	3
757	910	915	921	927	933	938	944	950	955	961	7	4	4
758	967	973	978	984	990	996	001	007	013	018	8	5	4
759	88024	030	036	041	047	053	058	064	070	076	9	5	5
760	081	087	093	098	104	110	116	121	127	133			
761	138	144	150	156	161	167	173	178	184	190			
762	195	201	207	213	218	224	230	235	241	247			
763	252	258	264	270	275	281	287	292	298	304			
764	309	315	321	326	332	338	343	349	355	360			
765	366	372	377	383	389	395	400	406	412	417			
766	423	429	437	440	446	451	457	463	468	474			
767	480	485	491	497	502	508	513	519	525	530			
768	536	542	547	553	559	564	570	576	581	587			
769	593	598	604	610	615	621	627	632	638	643			
770	649	655	660	666	672	677	683	689	694	700			
771	705	711	717	722	728	734	739	745	750	756			
772	762	767	773	779	784	790	795	801	807	812			
773	818	824	829	835	840	846	852	857	863	868			
774	874	880	885	891	897	902	908	913	919	925			
775	930	936	941	947	953	958	964	969	975	981			
776	986	992	997	003	009	014	020	025	031	037			
777	89042	048	053	059	064	070	076	081	087	092			
778	098	104	109	115	120	126	131	137	143	148			
779	154	159	165	170	176	182	187	193	198	204			
780	209	215	221	226	232	237	243	248	254	260			
781	265	271	276	282	287	293	298	304	310	315			
782	321	326	332	337	343	348	354	360	365	371			
783	376	382	387	393	398	404	409	415	421	426			
784	432	437	443	448	454	459	465	470	476	481			
785	487	492	498	504	509	515	520	526	531	537			
786	542	548	553	559	564	570	575	581	586	592			
787	597	603	609	614	620	625	631	636	642	647			
788	653	658	664	669	675	680	686	691	697	702			
789	708	713	719	724	730	735	741	746	752	757			
790	763	768	774	779	785	790	796	801	807	812			
791	818	823	829	834	840	845	851	856	862	867			
792	873	878	883	889	894	900	905	911	916	922			
793	927	933	938	944	949	955	960	966	971	777			
794	982	988	993	998	004	009	015	020	026	031			
795	90037	042	048	053	059	064	069	075	080	086			
796	091	097	102	108	113	119	124	129	135	140			
797	146	151	157	162	168	173	179	184	189	195			
798	200	206	211	217	222	227	233	238	244	249			
799	255	260	266	271	276	282	287	293	298	304			

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
800	90309	314	320	325	331	336	342	347	352	358
801	363	369	374	380	385	390	396	401	407	412
802	417	423	428	434	439	445	450	455	461	466
803	472	477	482	488	493	499	504	509	515	520
804	526	531	536	542	547	553	558	563	569	574
805	580	585	590	596	601	607	612	617	623	628
806	634	639	644	650	655	660	666	671	677	682
807	687	693	698	703	709	714	720	725	730	736
808	741	747	752	757	763	768	773	779	784	789
809	795	800	806	811	816	822	827	832	838	843
810	849	854	859	865	870	875	881	886	891	897
811	902	907	913	918	924	929	934	940	945	950
812	956	961	966	972	977	982	988	993	998	004
813	91009	014	020	025	030	036	041	046	052	057
814	062	068	073	078	084	089	094	100	105	110
815	116	121	126	132	137	142	148	153	158	164
816	169	174	180	185	190	196	201	206	212	217
817	222	228	233	238	243	249	254	259	265	270
818	275	281	286	291	297	302	307	312	318	323
819	328	334	339	344	350	355	360	365	371	376
820	381	387	392	397	403	408	413	418	424	429
821	434	440	445	450	455	461	466	471	477	482
822	487	492	498	503	508	514	519	524	529	535
823	540	545	551	556	561	566	572	577	582	587
824	593	598	603	609	614	619	624	630	635	640
825	645	651	656	661	666	672	677	682	687	693
826	698	703	709	714	719	724	730	735	740	745
827	751	756	761	766	772	777	782	787	793	798
828	803	808	814	819	824	829	834	840	845	850
829	855	861	866	871	876	882	887	892	897	903
830	908	913	918	924	929	934	939	944	950	955
831	960	965	971	976	981	986	991	997	002	007
832	92012	018	023	028	033	038	044	049	054	059
833	065	070	075	080	085	091	096	101	106	111
834	117	122	127	132	137	143	148	153	158	163
835	169	174	179	184	189	195	200	205	210	215
836	221	226	231	236	241	247	252	257	262	267
837	273	278	283	288	293	298	304	309	314	319
838	324	330	335	340	345	350	355	361	366	371
839	376	381	387	392	397	402	407	412	418	423
840	428	433	438	443	449	454	459	464	469	474
841	480	485	490	495	500	505	511	516	521	526
842	531	536	542	547	552	557	562	567	572	578
843	583	588	593	598	603	609	614	619	624	629
844	634	639	645	650	655	660	665	670	675	681
845	686	691	696	701	706	711	716	722	727	732
846	737	742	747	752	758	763	768	773	778	783
847	788	793	799	804	809	814	819	824	829	834
848	840	845	850	855	860	865	870	875	881	886
849	891	896	901	906	911	916	921	927	932	937

Z.	Diff. B. 6	5
1	1	1
2	1	1
3	2	2
4	2	2
5	3	3
6	4	3
7	4	4
8	5	4
9	5	5

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	P.	Diff. 6	P. 5	4
850	92942	947	952	957	962	967	973	978	983	988				
851	993	998	003	008	013	018	024	029	034	039	1	1	1	0
852	93044	049	054	059	064	069	075	080	085	090	2	1	1	1
853	095	100	105	110	115	120	125	131	136	141	3	2	2	1
854	146	151	156	161	166	171	176	181	186	192	4	2	2	2
855	197	202	207	212	217	222	227	232	237	242	5	3	3	2
856	247	252	258	263	268	273	278	283	288	293	6	4	3	2
857	298	303	308	313	318	323	328	334	339	344	7	4	4	3
858	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394	8	5	4	3
859	399	404	409	414	420	425	430	435	440	445	9	5	5	4
860	450	455	460	465	470	475	480	485	490	495				
861	500	505	510	515	520	526	531	536	541	546				
862	551	556	561	566	571	576	581	586	591	596				
863	601	606	611	616	621	626	631	636	641	746				
864	651	656	661	666	671	676	682	687	692	697				
865	702	707	712	717	722	727	732	737	742	747				
866	752	757	762	767	772	777	782	787	792	797				
867	802	807	812	817	822	827	832	837	842	847				
868	852	857	862	867	872	877	882	887	892	897				
869	902	907	912	917	922	927	932	937	842	947				
870	952	957	962	967	972	977	982	987	992	997				
871	94002	007	012	017	022	027	032	037	042	047				
872	052	057	062	067	072	077	082	086	091	096				
873	101	106	111	116	121	126	131	136	141	146				
874	151	156	161	166	171	176	181	186	191	196				
875	201	206	211	216	221	226	231	236	240	245				
876	250	255	260	265	270	275	280	285	290	295				
877	300	305	310	315	320	325	330	335	340	345				
878	349	354	359	364	369	374	379	384	389	394				
879	399	404	409	414	419	424	429	433	438	443				
880	448	453	458	463	468	473	478	483	488	493				
881	498	503	507	512	517	522	527	532	537	542				
882	547	552	557	562	567	571	576	581	586	591				
883	596	601	606	611	616	621	626	630	635	640				
884	645	650	655	660	665	670	675	680	685	689				
885	694	699	704	709	714	719	724	729	734	738				
886	743	748	753	758	763	768	773	778	783	787				
887	792	797	802	807	812	817	822	827	832	836				
888	841	846	851	856	861	866	871	876	880	885				
889	890	895	900	905	910	915	919	924	929	934				
890	639	944	949	954	959	963	968	973	978	983				
891	988	993	998	002	007	012	017	022	027	032				
892	95036	041	046	051	056	061	066	071	075	080				
893	085	090	095	100	105	109	114	119	124	129				
894	134	139	143	148	153	158	163	168	173	177				
895	182	187	192	197	202	207	211	216	221	226				
896	231	236	240	245	250	255	260	265	270	274				
897	279	284	289	294	299	303	308	313	318	323				
898	328	332	337	342	347	352	357	361	366	371				
899	376	581	386	390	395	400	405	410	415	419				

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
900	95424	429	434	439	444	448	453	458	463	468
901	472	477	482	487	492	597	501	506	511	516
902	521	525	530	535	540	545	550	554	559	564
903	569	574	578	583	588	593	598	602	607	612
904	617	622	626	631	636	641	646	650	655	660
905	665	670	674	679	684	689	694	698	703	708
906	713	718	722	727	732	737	742	746	751	756
907	761	766	770	775	780	785	789	794	799	804
908	809	813	818	823	828	832	837	842	847	852
909	856	861	866	871	875	880	885	890	895	899
910	904	909	914	918	923	928	933	938	942	947
911	952	957	961	966	971	976	980	980	990	995
912	999	004	009	014	019	023	028	033	038	042
913	96047	052	057	061	066	071	076	080	085	090
914	095	099	104	109	114	118	123	128	133	137
815	142	147	152	156	161	166	171	175	180	185
916	190	194	199	204	209	213	218	223	227	232
917	237	242	246	251	256	261	265	270	275	280
918	284	289	294	298	303	308	313	317	322	327
919	332	336	341	346	350	355	360	365	369	374
920	379	384	388	393	398	402	407	412	417	421
921	426	431	435	440	445	450	454	459	464	468
922	473	478	483	487	492	497	501	506	511	515
923	520	525	530	534	539	544	548	553	558	562
924	567	572	577	581	586	591	595	600	605	609
925	614	619	624	628	633	638	642	647	652	656
926	661	666	670	675	680	685	689	694	699	703
927	708	713	717	722	727	731	736	741	745	750
928	755	759	764	769	774	778	783	788	792	797
929	802	806	811	816	820	825	830	834	839	844
930	848	853	858	962	867	872	876	881	886	890
931	895	900	904	909	914	918	923	928	932	937
932	42	946	951	956	960	965	970	974	979	984
933	988	993	997	002	007	011	016	021	025	030
934	97035	039	044	049	053	055	063	067	072	077
935	081	086	090	095	100	104	109	114	118	123
936	128	132	137	142	146	151	155	160	165	169
937	174	179	183	188	192	197	202	206	211	216
938	220	225	230	234	239	243	248	253	257	262
939	267	271	276	280	285	290	294	299	304	308
940	313	317	322	327	331	336	340	345	350	354
941	359	364	368	373	377	382	387	391	396	400
942	405	410	414	419	424	428	433	437	442	447
943	451	456	460	465	470	474	479	483	488	493
944	497	502	506	511	516	520	525	529	534	539
945	543	548	552	557	562	566	571	575	580	585
946	589	594	598	603	607	612	617	621	626	630
947	635	640	644	649	653	658	663	667	672	676
948	681	685	690	695	699	704	708	713	717	722
949	727	731	736	740	745	749	754	759	763	768

S.	Diff. 5	4
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	2	2
5	3	2
6	3	2
7	4	3
8	4	3
9	5	4

Nro.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	6
950	97772	777	782	786	791	795	800	804	809	813
951	818	823	827	832	836	841	845	850	855	859
952	864	868	873	877	882	887	891	896	900	905
953	909	914	918	923	928	932	937	941	946	950
954	955	959	964	968	973	978	982	987	991	996
955	98000	005	009	014	019	023	028	032	037	041
956	046	050	055	059	064	068	073	078	082	087
957	091	096	100	105	109	114	118	123	127	132
958	137	141	146	150	155	159	164	168	173	177
959	182	186	191	195	200	204	209	214	218	223
960	227	232	236	241	245	250	254	259	263	268
961	272	277	281	286	290	295	299	304	308	313
962	318	322	327	331	336	340	345	349	354	358
963	363	367	372	376	381	385	390	394	399	403
964	408	412	417	421	426	430	435	439	444	448
965	453	457	462	466	471	475	480	484	489	493
966	498	502	507	511	516	520	525	529	534	538
967	543	547	552	556	561	565	570	574	579	583
968	588	592	597	601	605	610	614	619	623	628
969	632	637	641	646	650	655	659	664	668	673
970	677	682	686	691	695	700	704	709	713	717
971	722	726	731	735	740	744	749	753	758	762
972	767	771	776	780	784	789	793	798	802	807
973	811	816	820	825	829	834	838	843	847	851
974	856	860	865	869	874	878	883	887	892	896
975	900	905	909	914	918	923	927	932	936	941
976	945	949	954	958	963	967	972	976	981	985
977	989	994	998	*003*	*007*	*012*	*016*	*021*	*025*	*029*
978	99034	038	043	047	052	056	061	065	069	074
979	078	083	087	092	096	100	105	109	114	118
980	123	127	131	136	140	145	149	154	158	162
981	167	171	176	180	185	189	193	198	202	207
982	211	216	220	224	229	233	238	242	247	251
983	255	260	264	269	273	277	282	286	291	295
984	300	304	308	313	317	322	326	330	335	339
985	344	348	352	357	361	366	370	374	379	383
986	388	392	396	401	405	410	414	419	423	427
987	832	436	441	445	449	454	458	463	467	471
988	476	480	484	489	493	498	502	506	511	515
989	520	524	528	533	537	542	546	550	555	559
990	564	568	572	577	581	585	590	594	599	603
991	607	612	616	621	625	629	634	638	642	647
992	651	656	660	664	669	673	677	682	686	691
993	695	699	704	708	712	717	721	726	730	734
994	739	743	747	752	756	760	765	769	774	778
995	782	787	791	795	800	804	808	813	817	822
996	826	830	835	839	843	848	852	856	861	865
997	870	874	878	883	887	891	896	900	904	909
998	913	917	922	926	930	935	939	944	948	952
699	957	961	965	970	974	978	983	987	991	996

8.	Diff. P 5	4
1	1	0
2	1	1
3	2	1
4	2	2
5	3	2
6	3	2
7	4	3
8	4	3
9	5	4

Druckfehler.

Seite	18	Beispiel	7	statt 9 Loth ½ Qt., lies: 9 Loth 1 Q
—	22	—	8	— zu 3 ℘ das ℔, lies: zu 1½ ℘ das
—	23	—	10	— für 1 ℔ 0—1—$^{19}/_{20}$, lies: für 1 0—1—3⅕
—	23	—	10	— ℘ 76—11—1¾, lies: ℘ 76—12.
—	23	—	14	— ℘ 234—7—2, lies: ℘ 235 — 2—2
—	24	—	21	— 15 Thlr. 19 gr. 8 pf., lies: 15 Thlr. 19 gr. 9 pf.
—	25	—	21	— zu 5 pf., lies: zu 6 pf.
—	43	—	11	— $=-(8c+3b)$, lies: $=-(8a+3b)$
—	47	—	6	— $a+b-b$, lies: $a+b-c$.
—	62	—	1	— $\frac{2\times\ +1}{2\times3+2}$, lies: $\frac{2\times1+1}{2\times3+2}$
—	63	—	2	— $\frac{4\times23+2}{4\times70+67}$, lies: $\frac{4\times23+22}{4\times70+67}$
—	66	Verh. N.	1	— $a = {}^{a}/_{b}$, lies: $e = {}^{b}/_{a}$.
—	70	Prop. N.	4	— $b : a = e : c$, lies: $b : a = d : c$
—	73	—	6	— $1 : 4 = 5 : 10$, lies: $2 : 4 = 5 : 10$
—	76	Beispiel	8	— 1 Ctr. 50 ℔ $18^{9}/_{787}$ Qt., lies: 1 Ctr. 50 ℔ $18^{9}/_{787}$ Loth.
—	80	Aufl.	20	— 665 L. 13 s. 4 d., lies: 666 L. 13 s. 4 d.
—	81	—	22	— Tage f. 1 Mann, lies: Mann f. 1 Tag
—	90	Gegeb. N.	4	— $s = 900$, lies: $s = 1900$.
—	90	Berech. N.	7	— $\frac{8(-7\times14)}{2}$, lies: $\frac{8(-7+14)}{2}$
—	90	—	14	— $\frac{2-2\times2}{2\times3}$, lies: $\frac{3-2\times2}{2\times3}$
—	192	Qd.	531	— 271961, lies: 28961
—	195	QW.	676	— 26,0900000, lies: 27,0000000.
—	257	Aufl.	8	— $x = \frac{(a+b)cg-(f+g)bg}{ag-bf}$, lies: $x = \frac{(a+b)cg-(f+g)bh}{ag-bf}$
—	280	Diff. Prop. Col.	22	bei der Zahl 6 statt 15, lies: 13.
—	281	Log.	2890	statt 36090, lies: 46090.

Fig. 5.





